1. Expresiones Algebraicas

Introducción Ya hemos encontrado práctico usar letras como x o y para representar números; cada símbolo se llama **variable**. Una **expresión algebraica** es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^2 - 3xy + 1, \quad \frac{x^3 - z}{3xyz + 1}, \quad 2x - \sqrt[5]{z^5 \frac{x+2}{y-1}}$$

Definición 1.1 .

1. *Un **monomio** es una expresión de la forma ax^n, donde a es un número real llamado el **coeficiente** y n es un entero no negativo llamado **grado**.*

2. *Un **binomio** es una suma de dos monomios.*

3. *Un **trinomio** es una suma de tres monomios.*

Ejemplo 1.2 .

1. *$7x^5$, es un monomio con coeficiente 7 y grado 5.*

2. *-36, es un monomio con coeficiente -36 y grado 0.*

3. *$7x^{-3}$, NO es un monomio, ya que el grado $n = -3$ es negativo.*

4. *$4x^6 - \pi$ y $\frac{3}{4}x^3 - 7x$, son binomios.*

5. *$x^8 - \sqrt{13}x^5 + 11$ y $x^5 - 6x^3 - 8$, son trinomios.*

Definición 1.3 *Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{con} \qquad a_n \neq 0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales, y n es un entero no negativo.
*Los monomios $a_k x^k$ en el polinomio se llaman **términos** del polinomio.*
*El coeficiente a_n, de la potencia más alta de x se llama **coeficiente principal**.*
*n es el **grado** del polinomio.*
*El coeficiente a_0 se llama **término constante o independiente** del polinomio*

Ejemplo 1.4 .

1. $7x^5 - 4x^3 + 6x - 9$, *es un polinomio de* 4 *términos y grado* 5.

2. $-6x^7 + 2$, *es un polinomio de* 2 *términos (binomio) y grado* 7.

3. $\sqrt{5}$, *es un polinomio de* 1 *término (monomio) y grado* 0.

4. $7x^6 - 5x^{3/5} + x$, *NO es un polinomio, ya que no todos los exponentes son enteros no negativos.*

5. $\dfrac{3}{x} + 7$, *NO es un polinomio, ya que no todos los exponentes son enteros no negativos.*

2. Operaciones con polinomios

2.1. Suma y Resta

Para sumar y restar polinomios se usan las propiedades de números reales vistas en las primeras clases. La idea es combinar **términos semejantes**, es decir, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias.

Ejemplo 2.1 *Dados los polinomios* $p(x) = 5x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7x + 1$ *y* $q(x) = 3x^6 - 3x^4 + 5x^3 + 7x - 8$, *Calcular:*

1. *La suma* $p(x) + q(x)$
2. *La diferencia o resta* $p(x) - q(x)$

solución

1. *Para la suma se tiene*

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (5x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7x + 1) + (3x^6 - 3x^4 + 5x^3 + 7x - 8) \\ &= 3x^6 + 5x^5 + (-3x^4 - 3x^4) + 5x^3 + 2x^2 + (-7x + 7x) + (1 - 8) \\ &= 3x^6 + 5x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 7 \end{aligned}$$

2. *Para la resta se tiene*

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (5x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7x + 1) - (3x^6 - 3x^4 + 5x^3 + 7x - 8) \\ &= -3x^6 + 5x^5 + (-3x^4 + 3x^4) - 5x^3 + 2x^2 + (-7x - 7x) + (1 + 8) \\ &= -3x^6 + 5x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 14x + 9 \end{aligned}$$

Hasta el momento se han considerado polinomios en una variable. Se pueden tener polinomios en x o en otras variables, como $2y^2 - 5$, $4z^5 + 3z$ o polinomios en dos o más variables.

Definición 2.2 *Un polinomio en dos variables* x *y* y *es una suma de monomios (o términos) de la forma* ax^ny^m, *donde* a *es un número real,* x *y* y *son variables, y* n *y* m *son enteros no negativos.*

Para sumar y restar polinomios de varias variables se usan las propiedades de los números reales, como se hizo con los polinomios en una variable, se operan los términos semejantes.

Ejemplo 2.3 *Dados los polinomios* $5x^3y^2 - 3x^2y + 2xy^3 + 2x - 7y + 2$ *y* $2x^3y - 3x^2y - 2xy^3 - 2x - y$, *Calcular:*

1. *La suma*
2. *La diferencia o resta*

solución

1. *Para la suma se tiene*
   $(5x^3y^2 - 3x^2y + 2xy^3 + 2x - 7y + 2) + (2x^3y - 3x^2y - 2xy^3 - 2x - y)$
   $= 5x^3y^2 + 2x^3y - 6x^2y - 8y + 2$

2. *Para la resta se tiene*
   $(5x^3y^2 - 3x^2y + 2xy^3 + 2x - 7y + 2) - (2x^3y - 3x^2y - 2xy^3 - 2x - y)$
   $= 5x^3y^2 - 2x^3y + 4xy^3 + 4x - 6y + 2$

Ejercicios:

1. Encontrar el valor de $a + b + c$ si $(2a - b)\,x^2 + 4bx + 2c = 7x^2 + 20x - 12$

2. Lleve a cabo las operaciones indicadas y simplifique el resultado:

   a) $3\left(x^2 - 2x + 5\right) + 5\left(x^3 - 4x^2 + 7\right)$

   b) $3\left(x^3 - 2x^2 + 5\right) - 8\left(x^3 - 4x^2 + 7x\right)$

   c) $7x^2 + 2x + 5 + x\,(x + 7)$

   d) $3\left(x^4 - 2x^2 + 5\right) - x\left(x^3 - 4x^2 + 7\right)$

   e) $y^6 + 4y^3 - y^2 - \left(-y^3 - y^2 - 3y\right)$

   f) $10\left(t^3 - 4t^2 + 1\right) - t\,(2t + 6) + 8\left(t^3 - t - 5\right)$

   Soluciones: a) $5x^3 - 17x^2 - 6x + 50$, b) $-5x^3 + 26x^2 - 56x + 15$, c) $8x^2 + 9x + 5$, d) $2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 7x + 15$, e) $y^6 + 5y^3 + 3y$, f) $18t^3 - 42t^2 - 14t - 30$

2.2. Multiplicación o Producto

Para hallar el producto de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva y las Leyes de Exponentes y después se suman términos semejantes

Ejemplo 2.4 *1. Al multiplicar* $p(x) = 2x^2 + 3x - 5$ *por* $q(x) = x^2 - 2x$ *se tiene:*

$$\begin{aligned}
p(x)q(x) &= (2x^2 + 3x - 5)(x^2 - 2x) \\
&= 2x^2(x^2 - 2x) + 3x(x^2 - 2x) - 5(x^2 - 2x) \text{ Propiedad distributiva} \\
&= 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot (-2x) + 3x \cdot x^2 + 3x \cdot (-2x) - 5x^2 - 5(-2x) \text{ Propiedad distributiva} \\
&= 2x^4 - 4x^3 + 3x^3 - 6x^2 - 5x^2 + 10x \text{ leyes de los exponentes} \\
&= 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 10x \text{ suma de términos semejantes}
\end{aligned}$$

2. El producto de $p(x) = 3xy^2 - 2xy$ *por* $q(x) = x^2y + 3x$ *dá:*

$$\begin{aligned}
p(x)q(x) &= (3xy^2 - 2xy)(x^2y + 3x) \\
&= 3xy^2(x^2y + 3x) + 3xy^2(x^2y + 3x) \text{ Propiedad distributiva} \\
&= 3xy^2 \cdot x^2y + 3xy^2 \cdot 3x - 2xy \cdot x^2y - 2xy \cdot 3x \text{ Propiedad distributiva} \\
&= 3x^3y^3 + 9x^2y^2 - 2x^3y^2 - 6x^2y \text{ leyes de los exponentes}
\end{aligned}$$

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

2.3. Productos notables

Si A y B son números reales o expresiones algebraicas cualesquiera, entonces:

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	Suma por Diferencia
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	Cubo de una diferencia
6. $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$	
7. $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$	

Ejemplo 2.5 *Calcular cada uno de los siguientes productos:*

1. $(x^2 - 5)^2$

2. $(5x + 2y)^2$

3. $(2x^3 + 3y)(2x^3 - 3y)$

4. $(x^3 - 6x)^3$

5. $(2x + 4)(4x^2 - 8x + 16)$

6. $(x + 2z^2)^3$

Solución:

1. $(x^2 - 5)^2 = (x^2)^2 - 10x^2 + 25 = x^4 - 10x^2 + 25$

2. $(5x+2y)^2=(5x)^2+20xy+(2y)^2=25x^2+20xy+4y^2$

3. $(2x^3+3y)(2x^3-3y)=(2x^3)^2-(3y)^2=4x^6-9y^2$

4. $(x^3-6x)^3=(x^3)^3-3(x^3)^2(6x)+3x^3(6x)^2-(6x)^3$
$=x^9-18x^7+108x^5-216x^3$

5. $(2x+4)(4x^2-8x+16)=(2x)^3+4^3=8x^3+64$

6. $(x+2z^2)^3=x^3+3x^2(2z^2)+3x(2z^2)^2+(2z^2)^3=x^3+6x^2z^2+12xz^4+8z^6$

Ejercicios:

Efectuar las operaciones indicadas, utilizando productos notables:

1. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$
2. $\left(3b^2+6c^3\right)\left(3b^2-6c^3\right)$
3. $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a}+\frac{1}{b}\right)$
4. $(ax+by)^2(ax-by)^2$
5. $(x-4y)^3$
6. $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$
7. $(3a+2b-c)(3a-2b+c)$
8. $(x+2y)(x-2y)\left(x^2+4y^2\right)$
9. $(x-2y+5z)(x+2y+5z)$
10. $(-bu-v)(bu-v)$
11. $(a+3b)^2\left(a^2-6ab+9b^2\right)$
12. $(3a-b)\left(9a^2+3ab+b^2\right)$
13. $(x+y+z)^2$
14. $[2(a+b)+3][2(a+b)-3]$
15. $(2x-5y)\left(4x^2+10xy+25y^2\right)$
16. $(x+2y+3z)^2$
17. $\left[\left(a^2+3\right)-a\right]\left[\left(a^2+3\right)+a\right]$
18. $\left(\frac{a}{2}-2b+\frac{c}{4}\right)^2$

Rtas: 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}$, 2) $9b^4-36c^6$, 3) $a-\frac{1}{b^2}$, 4) $a^4x^4-2a^2b^2x^2y^2+b^4y^4$, 5) $x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3$, 6) x^3+8, 7) $9a^2-4b^2+4bc-c^2$, 8) x^4-16y^4, 9) $x^2-4y^2+25z^2+10xz$, 10) $v^2-(bu)^2$, 11) $a^4-18a^2b^2+81b^4$, 12) $27a^3-b^3$, 13) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$, 14) $4a^2+8ab+4b^2-9$, 15) $8x^3-125y^3$, 16) $x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz$, 17) a^4+5a^2+9, 18) $\frac{a^2}{4}+4b^2+\frac{c^2}{16}-2ab+\frac{ac}{4}-bc$

1. Demuestre que :
$$\frac{1}{2}\left[(a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)\right]=ab$$
2. Demuestre que
$$\left(\frac{(a+1)\,a}{2}\right)^2-\left(\frac{(a-1)\,a}{2}\right)^2=a^3$$
3. Demuestre que
$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bc)^2+(ad-bc)^2$$
4. Demuestre que $\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2$ es un cuadrado perfecto