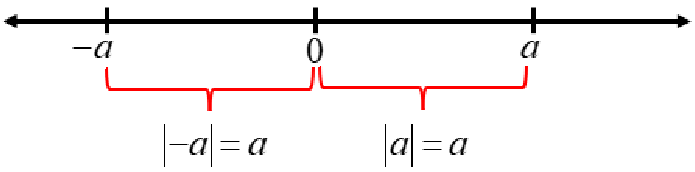
1. ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número *a*, denotado por $|a|$, es la distancia de *a* a 0 en la recta de números reales. El valor absoluto de cualquier número real es siempre positivo, sin importar su signo, ya que la distancia es siempre positiva o cero. Esto quiere decir que $|a| \geq 0$ para todo número real *a*.



PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Sean *a* y *b* números reales, entonces se tiene que:

1. Para cualquier numero real *a*, el valor absoluto es siempre mayor o igual a cero:
$$|a| \geq 0$$
2. Los números opuestos tienen igual valor absoluto.
$$|a| = |-a|$$
3. El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
4. El valor absoluto de un cociente es igual al cociente del valor absoluto de los factores.
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$
5. El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos. Esta propiedad es conocida como la **desigualdad triangular**.
$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

De forma general se tiene que:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Además, tenemos que:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Ejemplos

1. $|4| = 4$ 2. $|-8| = -(-8) = 8$ 3. $|-2(5)| = |-2||5| = (2)(5) = 10$ 4. $\left|\frac{-15}{3}\right| = \frac{|-15|}{|3|} = \frac{15}{3} = 5$

5. $|-3+8| \leq |-3| + |8| \Rightarrow |-5| \leq |-3| + |8| \Rightarrow 5 \leq 3+8 \Rightarrow 5 \leq 11$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Para resolver ecuaciones que involucre valor absoluto debemos tener en cuenta que para $a>0$ se cumple que:

$$|x|=a \Leftrightarrow x=a \quad \text{ó} \quad x=-a$$

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

1. $|2x-3|=7$

Solución

$$\begin{aligned}
&|2x-3|=7\\
&2x-3=7 \quad ó \quad 2x-3=-7\\
&2x=7+3 \quad ó \quad 2x=-7+3\\
&2x=10 \quad ó \quad 2x=-4\\
&x=\frac{10}{2} \quad ó \quad x=\frac{-4}{2}\\
&x=5 \quad ó \quad x=-2
\end{aligned}$$

2. $|2x+1|-3=8$

Solución

$$\begin{aligned}
&|2x+1|=8+3\\
&|2x+1|=11\\
&2x+1=11 \quad ó \quad 2x+1=-11\\
&2x=11-1 \quad ó \quad 2=-11-1\\
&2x=10 \quad ó \quad 2x=-12\\
&x=\frac{10}{2} \quad ó \quad x=\frac{-12}{2}\\
&x=5 \quad ó \quad x=-6
\end{aligned}$$

3. $|x^2+5x+3|=3$

Solución

$$\begin{aligned}
&|x^2+5x+3|=3\\
&x^2+5x+3=3 \quad ó \quad x^2+5x+3=-3\\
&x^2+5x=0 \quad ó \quad x^2+5x+6=0\\
&x(x+5)=0 \quad ó \quad (x+3)(x+2)=0\\
&\begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x=-3 \\ x=-2 \end{cases}
\end{aligned}$$

4. $|6-3x|=|2x+1|$

Solución

$$\begin{aligned}
&|6-3x|=|2x+1|\\
&\sqrt{(6-3x)^2}=\sqrt{(2x+1)^2}\\
&(6-3x)^2=(2x+1)^2\\
&36-36x+9x^2=4x^2+4x+1\\
&9x^2-4x^2-36x-4x+36-1=0\\
&5x^2-40x+35=0\\
&\frac{(5x)^2-40(5x)+175}{5}=0\\
&(5x-5)(5x-35)=0\\
&5x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{5}=1\\
&5x-35=0\Rightarrow x=\frac{35}{5}=7
\end{aligned}$$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Las inecuaciones con valor absoluto son desigualdades algebraicas en las que la incógnita aparece en el argumento de una función con valor absoluto.

En general, las soluciones a inecuaciones de valor absoluto toman dos formas, las cuales se indican a continuación.

1. $|x|<a$ si y solo si $-a<x<a$
2. $|x|\le a$ si y solo si $-a\le x\le a$
3. $|x|>a$ si y solo si $x<-a$ ó $x>a$
4. $|x|\ge a$ si y solo si $x\le -a$ ó $x\ge a$

Ejemplos: Resolver las siguientes desigualdades con valor absoluto

1. $\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{2}{3}$ 2. $\left|\frac{2-x}{3}\right|-\frac{1}{2}\ge 2$ 3. $|3x+5|\le|2x-10|$ 4. $\left|\frac{x+1}{3x-2}\right|>5$ 5. $|4x-2|\ge|2x+6|$

Solución

1. $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{2}{3}$

$\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}\leq x-\frac{1}{2}\leq\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\leq x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\leq\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{6}\leq x\leq\frac{7}{6}$

Así la solución es el intervalo $\left[-\frac{1}{6},\frac{7}{2}\right]$

2. $\left|\frac{2-x}{3}\right|-\frac{1}{2}\geq 2$

$\left|\frac{2-x}{3}\right|\geq 2+\frac{1}{2}$

$\left|\frac{2-x}{3}\right|\geq\frac{5}{2}$

$\frac{2-x}{3}\leq-\frac{5}{2}$ ó $\frac{2-x}{3}\geq\frac{5}{2}$

$2-x\leq-\frac{15}{2}$ ó $2-x\geq\frac{15}{2}$

$-x\leq-\frac{15}{2}-2$ ó $-x\geq\frac{15}{2}-2$

$-x\leq-\frac{19}{2}$ ó $-x\geq\frac{11}{2}$

$x\geq\frac{19}{2}$ ó $x\leq\frac{11}{2}$

La solución es el intervalo: $\left(-\infty,\frac{11}{2}\right]\cup\left[\frac{19}{2},\infty\right)$

3. $|3x+5|\leq|2x-10|$

$(3x+5)^2\leq(2x-10)^2$

$9x^2+30x+25\leq 4x^2-40x+100$

$9x^2-4x^2+30x+40x+25-100\leq 0$

$5x^2+70x-75\leq 0$

$\frac{(5x)^2+70(5x)-375}{5}\leq 0$

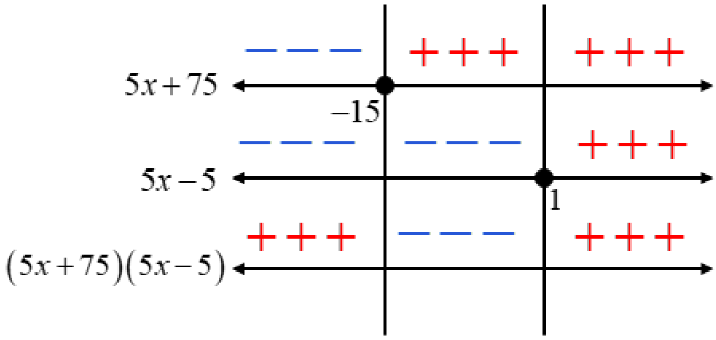
$(5x+75)(5x-5)\leq 0$

Buscamos los puntos críticos.

$$5x+75=0 \Rightarrow x=\frac{-75}{5}=-15$$

$$5x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{5}=1$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



La solución es el intervalo: $[-15,1]$

4. $\left|\frac{x+1}{3x-2}\right|>5$

$$\frac{x+1}{3x-2}<-5 \quad \text{ó} \quad \frac{x+1}{3x-2}>5$$

$$\frac{x+1+5(3x-2)}{3x-2}<0 \quad \text{ó} \quad \frac{x+1-5(3x-2)}{3x-2}>0$$

$$\frac{x+1+15x-10}{3x-2}<0 \quad \text{ó} \quad \frac{x+1-15x+10}{3x-2}>0$$

$$\frac{16x-9}{3x-2}<0 \quad \text{ó} \quad \frac{-14x+11}{3x-2}>0$$

$$\frac{16x-9}{3x-2}<0 \quad \text{ó} \quad \frac{14x-11}{3x-2}<0$$

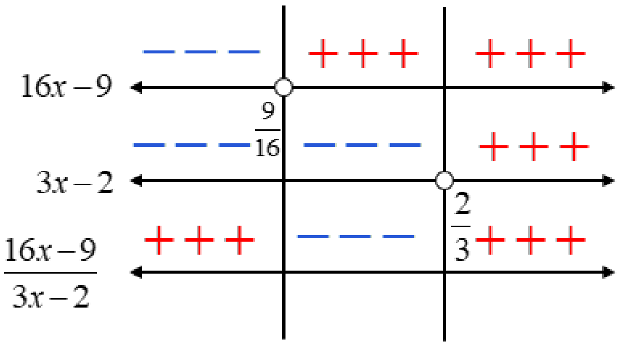
Buscamos los puntos críticos.

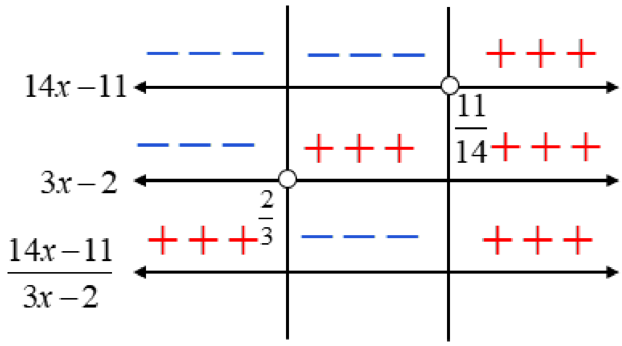
$$16x-9=0 \Rightarrow x=\frac{9}{16}$$

$$3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$14x-11=0 \Rightarrow x=\frac{11}{14}$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.





La solución es el intervalo: $\left(\frac{9}{16},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{11}{14}\right)$

5. $|4x-2|\geq|2x+6|$

$$(4x-2)^2\geq(2x+6)^2$$
$$16x^2-16x+4\geq4x^2+24x+36$$
$$16x^2-4x^2-16x-24x+4-36\geq0$$
$$12x^2-40x-32\geq0$$

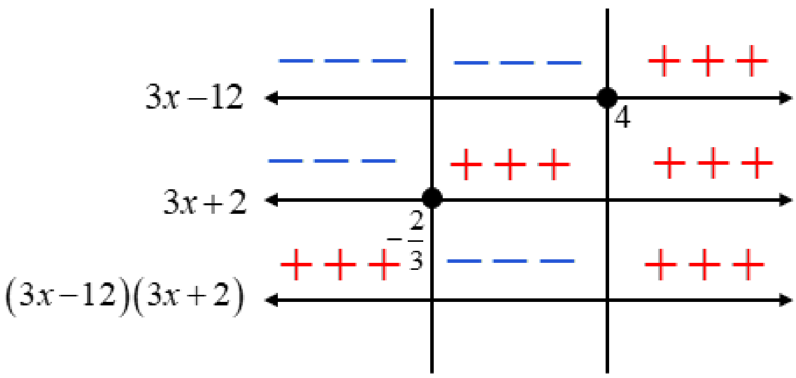
Dividimos por 4

$$3x^2-10x-8\geq0$$
$$(3x)^2-10(3x)-24\geq0$$
$$(3x-12)(3x+2)\geq0$$

Buscamos los puntos críticos.

$$3x-12=0\Rightarrow x=\frac{12}{3}=4$$
$$3x+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



La solución es el intervalo: $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[4,\infty)$