CURSO DE MATEMÁTICAS

EXPRESIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

EXPRESIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Al comienzo del curso se estudiaron expresiones de la forma x^n; esto es, expresiones con una base variable x y una potencia o exponente constante n. Ahora examinaremos expresiones de la forma a^x; en este caso la base es una constante a y el exponente una variable x.

Los siguientes son ejemplos de expresiones exponenciales:

$$3^x - 5^{(2x-5)} + 1, \quad \frac{4^{3x} - 7^2}{3^{4(x-2)}}, \quad 2^x - \sqrt{5^{\left(\frac{x+2}{y-1}\right)}}$$

Las leyes de los exponentes dadas para las potencias, también aplican para los exponenciales.

Leyes de los exponentes. Sean $a > 0$ y $b > 0$, x; y; z números reales, se tienen las siguientes leyes para las expresiones exponenciales:

$$1\cdot\ a^x a^y = a^{x+y} \qquad 2\cdot\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad 3\cdot\ \left(a^x\right)^y = a^{xy} \qquad 4\cdot\ (ab)^x = a^x b^x$$

$$5\cdot\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad 6\cdot\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad 7\cdot\ a^x = a^y \text{ si y solo si } x = y$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación exponencial es aquella cuya incógnita se ubica en el exponente.

Son ejemplos de ecuaciones exponenciales las siguientes:

$$1)\ \ 3^{x}=81 \quad 2)\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}=27 \quad 3)\ \ 7^{x-2}=343$$

Para resolver una ecuación exponencial se debe hallar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad. Para ello, se aplican las propiedades de la potenciación

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales.

1) $125^{x-1}=15625$

$$\left(5^3\right)^{x-1}=5^6$$

$$5^{3x-3}=5^6$$

$$3x-3=6$$

$$3x=6+3$$

$$3x=9$$

$$x=\frac{9}{3}$$

$$\boxed{x=3}$$

2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+2x}=\left(\frac{1}{49}\right)^{-3x-6}$

$$\left(7^{-1}\right)^{x^2+2x}=\left(7^{-2}\right)^{-3x-6}$$

$$7^{-x^2-2x}=7^{6x+12}$$

$$-x^2-2x=6x+12$$

$$x^2+6x+2x+12=0$$

$$x^2+8x+12=0$$

$$(x+2)(x+6)=0$$

$$x+2=0\Rightarrow \boxed{x=-2}$$

$$x+6=0\Rightarrow \boxed{x=-6}$$

3) $27^{x-3}\cdot 9^{x+1}=81^{x+3}$

$$\left(3^3\right)^{x-3}\cdot\left(3^2\right)^{x+1}=\left(3^4\right)^{x+3}$$

$$3^{3x-9}\cdot 3^{2x+2}=3^{4x+12}$$

$$3^{3x+2x-9+2}=3^{4x+12}$$

$$3^{5x-7}=3^{4x+12}$$

$$5x-7=4x+12$$

$$5x-4x=12+7$$

$$\boxed{x=19}$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Una ecuación logarítmica es aquella cuya incógnita se ubica en el argumento.

La expresión $\log_a y = x$ significa que $a^y = x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, es decir, el logaritmo de x con base a es el exponente al cual debe elevarse a para obtener x .

Cuando se usa la definición de logaritmo para intercambiar entre la forma logarítmica y la forma exponencial, es útil observar que, en ambos caso la base es la misma.

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
Exponente: y	Exponente: y
$\log_a x = y$	$a^y = x$
Base: a	Base: a

Dos casos particulares se dan cuando las bases son 10 y e, se tiene:

$$\log_{10} x = \log x \quad \text{y} \quad \log_e x = \ln x$$

A este último se le conoce como logaritmo natural.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Ejemplos

1· $\log_3 3 = 1$ ya que $3^1 = 3$

2· $\log_5 1 = 0$ ya que $5^0 = 1$

3· $\log_4 64 = 3$ ya que $4^3 = 64$

4· $\log_3 81 = 4$ ya que $3^4 = 81$

5· $\log_5 \dfrac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3$ ya que $5^{-3} = \dfrac{1}{125}$

6· $\log_{81} 3 = \dfrac{1}{4}$ ya que $81^{1/4} = \sqrt[4]{81} = 3$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Sea a un número real positivo, con $a \neq 1$ y $x, y, n \in \Re^+$ se cumplen las siguientes propiedades.

1. Logaritmo de un producto: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. Logaritmo de un cociente: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. Logaritmo de una potencia: $\log_a x^n = n\log_a x$
4. Logaritmo de una raíz: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$
5. Logaritmo en base *a* de 1: $\log_a 1 = 0$
6. Logaritmo en base *a* de *a*: $\log_a a = 1$
7. Propiedad del cambio de base: $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x$
8. Logaritmo en base *a* de a^x : $\log_a a^x = x$
9. Base a elevado al logaritmo en base a de *x*: $a^{\log_a x} = x$
10. Si $\log_a x = \log_a y$ entonces $x = y$

Ejemplos: Usando las propiedades, y sin calculadora, encuentre el valor de:

1) $\log_3\left(3^5+3^5+3^5\right)=\log_3\left(3\cdot 3^5\right)=\log_3 3^6=6\log_3 3=6\cdot(1)=6$

2) $e^{\ln 10}-\log_{11}121=10-\log_{11}11^2=10-2\log_{11}11=10-2\cdot(1)=10-2=8$

3) $\log_7 21+\log_7 98-\log_7 6=\log_7\left(21\cdot 98\right)-\log_7 6=1=\log_7\left(\dfrac{21\cdot 98}{6}\right)=\log_7 7^3=3$

4) $2\log_5 50-\dfrac{1}{2}\log_5 16+\log_5 125=\log_5 50^2-\log_5\sqrt{16}+\log_5 125=\log_5 2500-\log_5 4+\log_5 125$

$=\log_5\left(\dfrac{2500}{4}\right)+\log_5 125=\log_5 625+\log_5 125=\log_5 5^4+\log_5 5^3=4+3=7$

Ejemplos: Expandir las siguientes expresiones de tal forma que no hayan ni productos, ni divisiones ni potencias en los logaritmos.

1) $\log_3\left(6x^4\sqrt{y}\right)=\log_3 6+\log_3 x^4+\log_3\sqrt{y}=2+4\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y$

2) $\log_a\left(\frac{xy^{3/2}}{z^5}\right)=\log_a\left(xy^{3/2}\right)-\log_a\left(z^5\right)=\log_a x+\log_a\left(y^{3/2}\right)-\log_a\left(z^5\right)=\log_a x+\frac{3}{2}\log_a y-5\log_a z$

3) $\log_3\left(\frac{6x^2}{y^4}\right)=\log_3\left(6x^2\right)-\log_3\left(y^4\right)=\log_3 6+\log_3\left(x^2\right)-\log_3\left(y^4\right)=\log_3 6+2\log_3 x-4\log_3 y$

4) $\log_5\left(x\sqrt{\frac{y}{z^3}}\right)=\log_5\left(\frac{xy^{1/2}}{z^{3/2}}\right)=\log_5\left(xy^{1/2}\right)-\log_5\left(z^{3/2}\right)=\log_5 x+\log_5\left(y^{1/2}\right)-\log_5\left(z^{3/2}\right)$

$$=\log_5 x+\frac{1}{2}\log_5 y-\frac{3}{2}\log_5 z$$

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

1) $\log_3\left(x^2-4x+4\right)=4$

$$x^2-4x+4=3^4$$
$$x^2-4x+4=81$$
$$x^2-4x+4-81=0$$
$$x^2-4x-77=0$$
$$(x-11)(x+7)=0$$
$$x-11=0\Rightarrow \boxed{x=11}$$
$$x+7=0\Rightarrow \boxed{x=-7}$$

2) $2\log x+\log(x+3)=\log 40x$

$$\log x^2+\log(x+3)=\log 40x$$
$$\log\left[x^2(x+3)\right]=\log 40x$$
$$x^2(x+3)=40x$$
$$x(x+3)=40$$
$$x^2+3x=40$$
$$x^2+3x-40=0$$
$$(x+8)(x-5)=0$$
$$x+8=0\Rightarrow \boxed{x=-8}$$
$$x-5=0\Rightarrow \boxed{x=5}$$

3) $\log_3(x-5)=2$

$$x-5=3^2$$
$$x-5=9$$
$$x=9+5$$
$$\boxed{x=14}$$