CURSO DE MATEMÁTICAS

DESIGUALDADES E INECUACIONES

DESIGUALDADES

En matemáticas, una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos valores cuando estos son distintos. Si los valores en cuestión son elementos de un conjunto ordenado, como los enteros o los reales, entonces pueden ser comparados.

Orden en los reales

1. Diremos que $a < b$ “a es menor que b” si $b - a$ es un número positivo. Gráficamente, significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica.
2. Diremos que $a > b$ “a mayor que b” si $a - b$ es un número positivo. Gráficamente, significa que a está a la derecha de b en la recta numérica.
3. Diremos que $a \leq b$ “a es menor o igual que b” si $a < b$, o bien, $a = b$.
4. Diremos que $a \geq b$ “a es mayor o igual que b” si $a > b$, o bien, $a = b$.

Terminología: Los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ se llaman símbolos de desigualdad y las expresiones como $a < b$ o $b \geq a$ se denominan desigualdades.

La desigualdad $a > 0$ significa que el número a está a la derecha del cero en la recta numérica y, en consecuencia, a es un número positivo. Indicamos que un número a es negativo por medio de la desigualdad $a < 0$.

Nota: Dados dos números reales a y b se cumple una y solo una de las siguientes opciones.

$$a < b,\ a = b \text{ ó } a > b$$

La propiedad anterior se llama ley de la tricotomía o tercio excluido.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Dados los números reales a, b, c, d se cumple:

1. Transitividad: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
2. Uniforme: Si $a < b$, entonces $a \pm c < b \pm c$ (se puede sumar o restar lo mismo a ambos lados de la desigualdad)
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$. Si en una desigualdad se multiplica por un número positivo, esta se conserva.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$. Si se multiplica por un número negativo en una desigualdad, esta cambia.
5. Si $0 < a < b$ entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Observación: Las propiedades anteriores también se cumplen para las demás desigualdades, cambiando el símbolo $<$ por $>$, $\leq$, $\geq$ según el caso.

INTERVALOS

Un intervalo es un subconjunto de la recta real, el cual contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos cualesquiera de sus elementos. Geométricamente los intervalos corresponden a segmentos de recta, semirrectas o la misma recta real.

Usando la notación de conjuntos, podemos escribir:

$$(a,b)=\{x/a<x<b\}\ y\ [a,b]=\{x/a\leq x\leq b\}$$

Los paréntesis en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica indican que los puntos extremos están excluidos del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares y los círculos sólidos de la gráfica indican que los puntos extremos están incluidos.

Los intervalos también pueden incluir un punto extremo, pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La siguiente tabla es una lista de posibles tipos de intervalos.

Nombre del intervalo	Notación de intervalo	Descripción de conjunto	Representación gráfica
Abierto	(a, b)	$\{x / a < x < b\}$	
Abierto a la izquierda y cerrado a la derecha	$(a, b]$	$\{x / a < x \leq b\}$	
Cerrado a la izquierda y abierto a la derecha	$[a, b)$	$\{x / a \leq x < b\}$	
Cerrado	$[a, b]$	$\{x / a \leq x \leq b\}$	
Infinito abierto a la izquierda	$(a, +\infty)$	$\{x / x > a\}$	
Infinito cerrado a la izquierda	$[a, +\infty)$	$\{x / x \geq a\}$	
Infinito abierto a la derecha	$(-\infty, b)$	$\{x / x < b\}$	
Infinito cerrado a la derecha	$(-\infty, b]$	$\{x / x \leq b\}$	
Infinito	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

INECUACIONES

Las inecuaciones son expresiones algebraicas que se relacionan a partir de desigualdades. Las inecuaciones se conforman por valores conocidos y desconocidos. Estos últimos son llamados incógnitas.

Ejemplos:

$$3x^2 - 4x > \frac{y-1}{2z+3}; \quad 7x+5 < 2x-10; \quad \frac{2}{x+3} \geq \frac{5}{2x-1}$$

Observación: Vamos a considerar inecuaciones con una sola variable o incógnita que, por lo general, será la letra *x*.

INECUACIONES LINEALES

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones lineales.

1) $7x - 6 > 3x + 14$

Solución

$$7x - 6 > 3x + 14$$

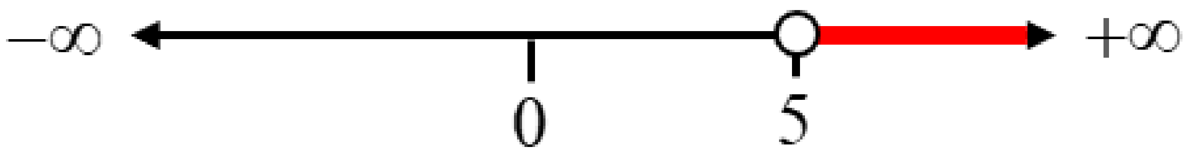
$$7x - 3x > 14 + 6$$

$$4x > 20$$

$$x > \frac{20}{4}$$

$$x > 5$$

Gráfica



Así la solución es el intervalo $(5, \infty)$

2) $2(x-3)>4x+2$

Solución

$$2(x-3)>4x+2$$

$$2x-6>4x+2$$

$$2x-4x>2+6$$

$$-2x>8$$

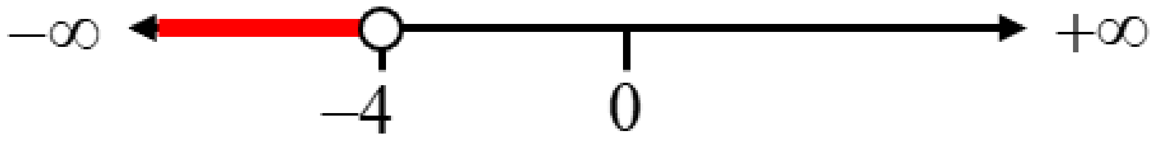
Ahora multiplicamos ambos lados por -1, lo cual hace que la desigualdad cambie de sentido.

$$2x<-8$$

$$x<\frac{-8}{2}$$

$$x<-4$$

Gráfica



Así la solución es el intervalo $(-\infty,-4)$

3) $22x-3\left(3x-\left(3-2x\right)\right)\geq 2\left(3x-4\left(5-x\right)\right)$

Solución

$$22x-3\left(3x-\left(3-2x\right)\right)\geq 2\left(3x-4\left(5-x\right)\right)$$

$$22x-3\left(3x-3+2x\right)\geq 2\left(3x-20+4x\right)$$

$$22x-3\left(5x-3\right)\geq 2\left(7x-20\right)$$

$$22x-15x+9\geq 14x-40$$

$$7x+9\geq 14x-40$$

$$7x-14x\geq -40-9$$

$$-7x\geq -49$$

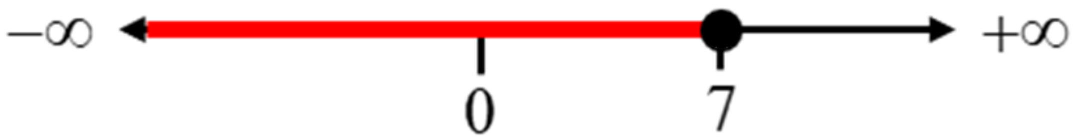
Ahora multiplicamos ambos lados por -1, lo cual hace que la desigualdad cambie de sentido.

$$7x\leq 49$$

$$x\leq \frac{49}{7}$$

$$x\leq 7$$

Gráfica



Así la solución es el intervalo $\left(-\infty,7\right]$

4) $$\frac{5x-3}{6}+\frac{x-5}{18}\geq\frac{x+1}{3}$$

Solución

Buscamos primero el m.c.m de los denominadores. Esto es:

3	6	18	2
3	3	9	3
1	1	3	3
1	1	1	

El m.c.m(3, 6, 18) =18

Ahora quitamos los denominadores multiplicando ambas partes de la inecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Eso es:

$$18\cdot\left(\frac{5x-3}{6}+\frac{x-5}{18}\right)\geq 18\cdot\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

$$18\cdot\left(\frac{5x-3}{6}\right)+18\cdot\left(\frac{x-5}{18}\right)\geq 18\cdot\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

$$3(5x-3)+x-5\geq 6(x+1)$$

$$15x-9+x-5\geq 6x+6$$

$$16x-14\geq 6x+6$$

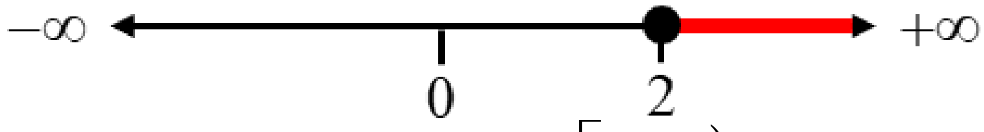
$$16x-6x\geq 6+14$$

$$10x\geq 20$$

$$x\geq\frac{20}{10}$$

$$x\geq 2$$

Gráfica



Así la solución es el intervalo $[2,\infty)$

INECUACIONES CUADRÁTICAS

Para resolver una inecuación cuadrática se siguen los siguientes pasos:

1. Se desiguala la inecuación a cero.
2. Se calculan los ceros o raíces del polinomio.
3. Se representan los ceros o raíces del polinomio en la recta real.
4. Se calcula el signo del valor del polinomio en cada uno de los intervalos que determinan los ceros.
5. Se resolver la inecuación por intervalos y gráfica de la solución.

1) $x^2-3x-10>0$

Solución

Factorizamos

$$x^2-3x-10>0$$

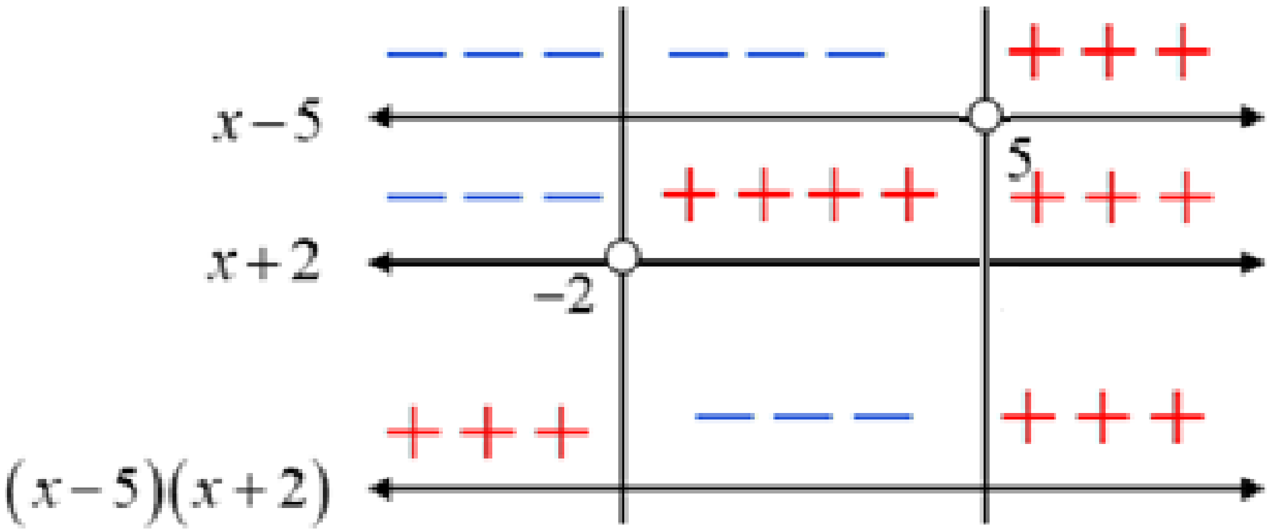
$$(x-5)(x+2)>0$$

Buscamos los puntos críticos igualando cada termino dentro de los paréntesis a cero.

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



Como se buscan los valores que hacen la expresión > 0, entonces el resultado es:

$$(-\infty,-2)\cup(5,\infty)$$

2) $2x^2 - 2 < -3x$

Solución

Factorizamos

$$2x^2 - 2 < -3x$$

$$2x^2 + 3x - 2 < 0$$

$$\frac{2\times\left(2x^2 + 3x - 2\right)}{2} < 0$$

$$\left(2x\right)^2 + 3\left(2x\right) - 4 < 0$$

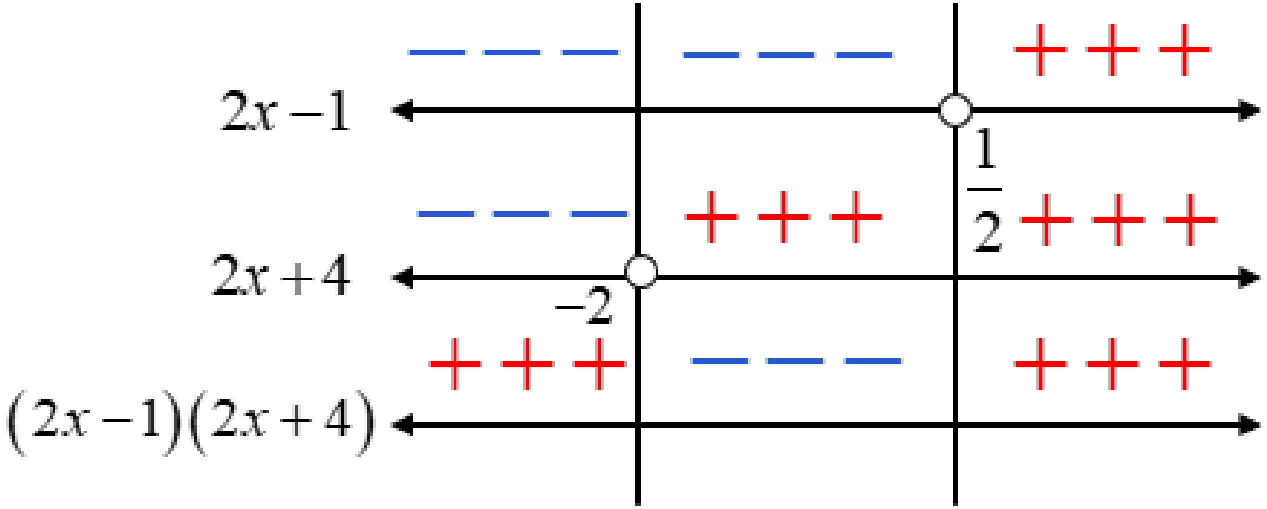
$$\left(2x + 4\right)\left(2x - 1\right) < 0$$

Buscamos los puntos críticos igualando cada termino dentro de los paréntesis a cero.

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



Como se buscan los valores que hacen la expresión < 0, entonces el resultado es:

$$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

3) $2x^2+5x-3\leq 0$

Solución

Factorizamos

$$2x^2+5x-3\leq 0$$

$$\frac{2\times\left(2x^2+5x-3\right)}{2}\leq 0$$

$$\left(2x\right)^2+5\left(2x\right)-6\leq 0$$

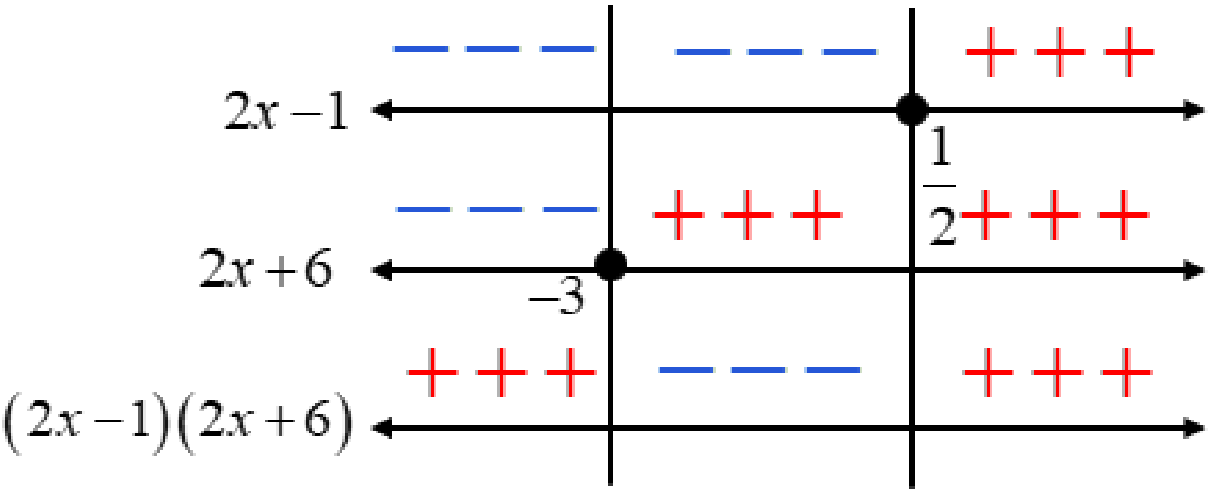
$$\left(2x+6\right)\left(2x-1\right)\leq 0$$

Buscamos los puntos críticos igualando cada termino dentro de los paréntesis a cero.

$$2x+6=0\Rightarrow x=\frac{-6}{2}=-3$$

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



Como se buscan los valores que hacen la expresión ≤ 0, entonces el resultado es:

$$\left[-3,\frac{1}{2}\right]$$

INECUACIONES RACIONALES

Una inecuación es racional si tiene fracciones con incógnitas en el denominador.
Para resolver una inecuación racional se siguen los siguientes pasos:

1. Se desiguala la inecuación a cero.
2. Se efectúan las operaciones necesarias para que quede una fracción algebraica desigualada a cero.
3. Se calculan los ceros o raíces del numerador y denominador de la fracción obtenida en el segundo paso.
4. Se representan los ceros o raíces del polinomio en la recta real.
5. Se calcula el signo del valor del polinomio en cada uno de los intervalos que determinen los ceros.
6. Se resolver la inecuación por intervalos y gráfica de la solución.

Nota: Una inecuación racional no tiene solución cuando el denominador de la fracción es cero.

1) $\dfrac{3x+4}{2x-1} \leq 0$

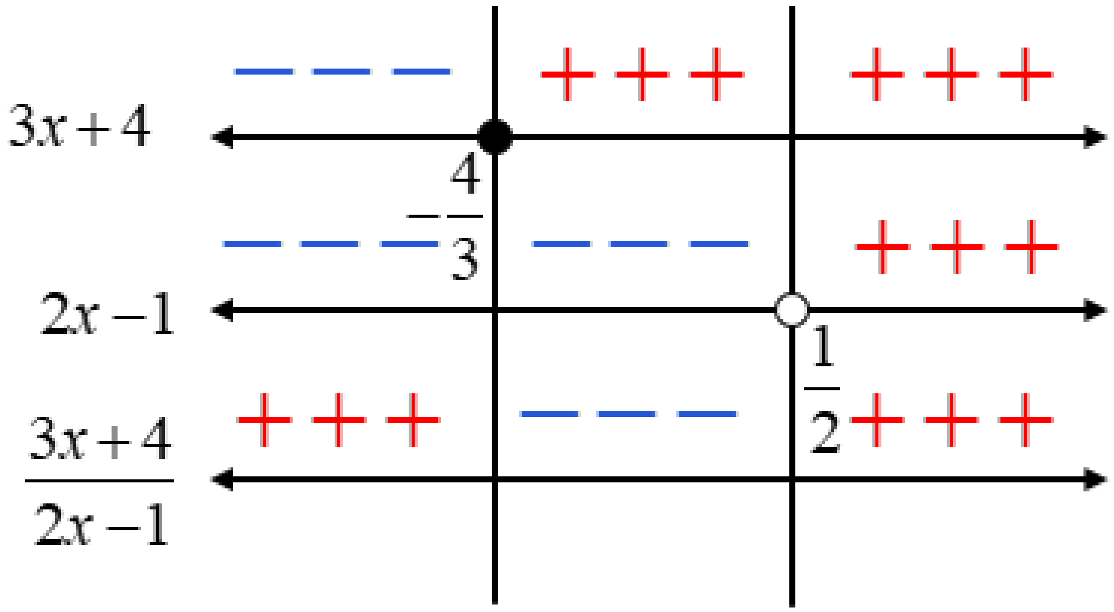
Solución

Buscamos los puntos críticos igualando cada termino de la inecuación a cero.

$$3x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-4}{3}$$

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



Como se buscan los valores que hacen la expresión ≤ 0, entonces el resultado es:

$$\left[-\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right)$$

2) $\dfrac{4}{3x-2} \geq \dfrac{1}{x-3}$

Solución

Factorizamos

$$\frac{4}{3x-2} \geq \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{4}{3x-2} - \frac{1}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{4(x-3)-(3x-2)}{(3x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{4x-12-3x+2}{(3x-2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{x-10}{(3x-2)(x-3)} \geq 0$$

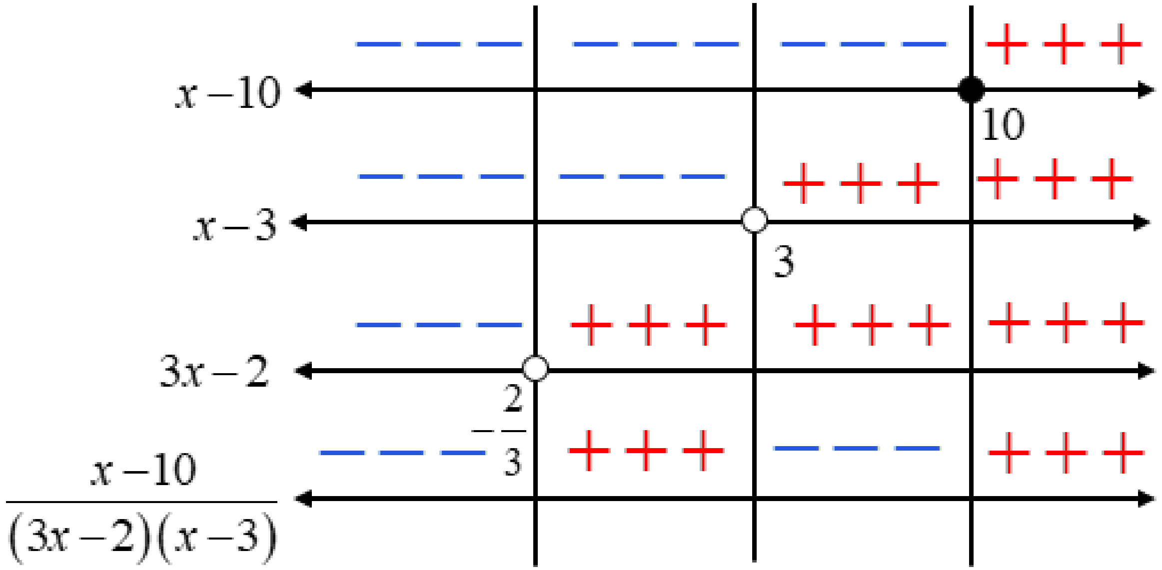
Buscamos los puntos críticos.

$$x-10=0 \Rightarrow x=10$$

$$3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



Como se buscan los valores que hacen la expresión ≥ 0, entonces el resultado es:

$$\left(\frac{2}{3},3\right) \cup [10,\infty)$$

3) $\dfrac{x^2+8x+15}{x-1} \leq 0$

Solución

Factorizamos

$$\frac{x^2+8x+15}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{(x+5)(x+3)}{x-1} \leq 0$$

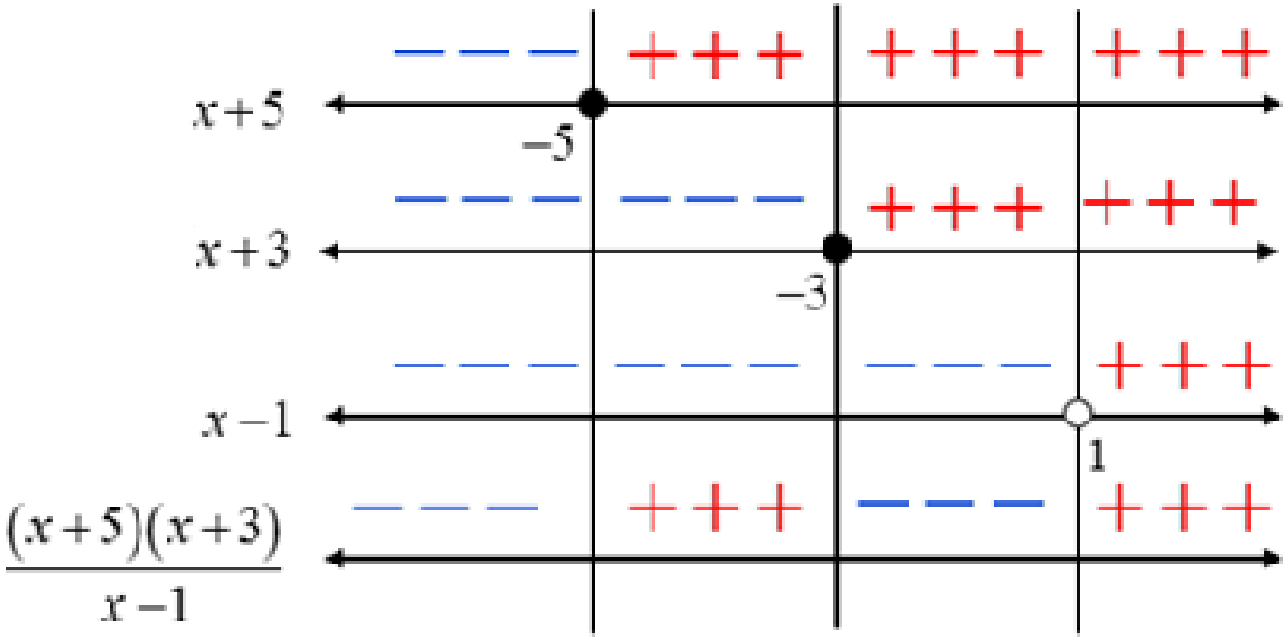
Buscamos los puntos críticos.

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Realizamos la gráfica en la recta numérica.



Como se buscan los valores que hacen la expresión ≤ 0, entonces el resultado es:

$$(-\infty,-5]\cup[-3,1)$$