1. Teorema de los ceros racionales

Si el polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de dicho polinomio es de la forma $\dfrac{p}{q}$ donde: p es un divisor del término independiente a_0 y q es un divisor del coeficiente principal a_n.

Ejemplos: Encontrar todos los ceros racionales (raíces) de los siguientes polinomios.

1. $P(x)=x^4+6x^3-4x^2-54x-45$
2. $P(x)=x^3+4x^2+x-6$
3. $P(x)=3x^3-11x^2+x+15$
4. $P(x)=x^4+4x^3-9x^2-16x+20$
5. $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$
6. $P(x)=x^4+8x^3+5x^2-74x-120$

Solución

1. $P(x)=x^4+6x^3-4x^2-54x-45$

Los divisores de $a_0=45$ son: $p:\pm1,\pm3,\pm5,\pm9,\pm15,\pm45$

Los divisores de $a_n=1$ son: $q:\pm1$

Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son: $\dfrac{p}{q}:\pm1,\pm3,\pm5,\pm9,\pm15,\pm45$

$P(1)=1^4+6(1)^3-4(1)^2-54(1)-45\neq0$, luego 1 no es una raíz o cero del polinomio

$P(-1)=(-1)^4+6(-1)^3-4(-1)^2-54(-1)-45=0$, luego -1 es una raíz o cero del polinomio y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 6 & -4 & -54 & -45 & \underline{-1} \\ & -1 & -5 & 9 & 45 & \\ \hline 1 & 5 & -9 & -45 & 0 & \end{array}$$

Así $P(x)=x^4+6x^3-4x^2-54x-45=(x+1)(x^3+5x^2-9x-45)$

Se repite el proceso ahora para el polinomio $Q(x)=x^3+5x^2-9x-45$

$Q(-1)=(-1)^3+5(-1)^2-9(-1)-45\neq0$, luego -1 no se repite como una raíz o cero.

$Q(3)=(3)^3+5(3)^2-9(3)-45=0$, así 3 es una raíz o cero de $Q(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 5 & -9 & -45 & \underline{3} \\ & 3 & 24 & 45 & \\ \hline 1 & 8 & 15 & 0 & \end{array}$$

Luego entonces: $P(x)=(x+1)(x-3)(x^2+8x+15)=(x+1)(x-3)(x+3)(x+5)$

La última factorización es un trinomio de la forma x^2+bx+c.

2. $P(x)=x^3+4x^2+x-6$

Los divisores de $a_0=6$ son: $p:\pm1,\pm3,\pm6$

Los divisores de $a_n=1$ son: $q:\pm1$

Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son: $\frac{p}{q}:\pm1,\pm3,\pm5,\pm6$

$P(1)=(1)^3+4(1)^2+(1)-6=0$, así 1 es una raíz o cero del polinomio $P(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 4 & 1 & -6 & \underline{1} \\ & 1 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Así: $P(x)=x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)=(x-1)(x+2)(x+3)$

3. $P(x)=3x^3-11x^2+x+15$

Los divisores de $a_0=15$ son: $p:\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$

Los divisores de $a_n=3$ son: $q:\pm1,\pm3$

Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son: $\frac{p}{q}:\pm\frac{1}{3},\pm1,\pm\frac{5}{3},\pm3,\pm5,\pm15$

$P(-1)=3(-1)^3-11(-1)^2+(-1)+15=0$, así -1 es una raíz o cero del polinomio $P(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & 1 & 15 & \underline{-1} \\ & -3 & 14 & -15 & \\ \hline 3 & -14 & 15 & 0 & \end{array}$$

Así: $P(x)=3x^3-11x^2+x+15=(x+1)(3x^2-14x+15)$

La factorización del polinomio $Q(x)=3x^2-14x+15$ es:

$$Q(x)=\frac{(3x)^2-14(3x)+45}{3}=\frac{(3x-9)(3x-5)}{3}=\frac{\cancel{3}(x-3)(3x-5)}{\cancel{3}}=(x-3)(3x-5)$$

Luego entonces: $P(x)=(x+1)(x-3)(3x-5)$

4. $P(x)=x^4+4x^3-9x^2-16x+20$

Los divisores de $a_0=20$ son: $p:\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\pm10,\pm20$
Los divisores de $a_n=1$ son: $q:\pm1$
Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son: $\dfrac{p}{q}:\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\pm10,\pm20$

$P(1)=(1)^4+4(1)^3-9(1)^2-16(1)+20=0$, así 1 es una raíz o cero del polinomio $P(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 4 & -9 & -16 & 20 & \underline{1} \\ & 1 & 5 & -4 & 20 & \\ \hline 1 & 5 & -4 & -20 & 0 & \end{array}$$

Así $P(x)=x^4+4x^3-9x^2-16x+20=(x-1)\left(x^3+5x^2-4x-20\right)$
Se repite el proceso ahora para el polinomio $Q(x)=x^3+5x^2-4x-20$
$Q(2)=(2)^3+5(2)^2-4(2)-20=0$, así 2 es una raíz o cero de $Q(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 5 & -4 & -20 & \underline{2} \\ & 2 & 14 & 20 & \\ \hline 1 & 7 & 10 & 0 & \end{array}$$

Luego entonces: $P(x)=(x+1)(x-2)\left(x^2+7x+10\right)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+5)$

5. $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$

Los divisores de $a_0=6$ son: $p:\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$
Los divisores de $a_n=2$ son: $q:\pm1,\pm2$
Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son: $\dfrac{p}{q}:\pm\dfrac{1}{2},\pm1,\pm\dfrac{3}{2},\pm2,\pm3,\pm6$

$P(2)=2(2)^3+(2)^2-13(2)+6=0$, así 2 es una raíz o cero del polinomio $P(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 1 & -13 & 6 & \underline{2} \\ & 4 & 10 & -6 & \\ \hline 2 & 5 & -3 & 0 & \end{array}$$

Así: $P(x)=2x^3+x^2-13x+6=(x-2)\left(2x^2+5x-3\right)$
La factorización del polinomio $Q(x)=2x^2+5x-3$ es:

$$Q(x)=\frac{(2x)^2+5(2x)-6}{2}=\frac{(2x+6)(2x-1)}{2}=\frac{\cancel{2}(x+3)(2x-1)}{\cancel{2}}=(x+3)(2x-1)$$

Luego entonces: $P(x)=(x-2)(x+3)(2x-1)$

6. $P(x) = x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 74x - 120$

Los divisores de $a_0 = 120$ son: $p: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 40, \pm 60, \pm 120$

Los divisores de $a_n = 1$ son: $q: \pm 1$

Posibles ceros racionales: $\dfrac{p}{q}: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 40, \pm 60, \pm 120$

$P(-2) = (-2)^4 + 8(-2)^3 + 5(-2)^2 - 74(-2) - 120 = 0$, así -2 es una raíz o cero del polinomio $P(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 8 & 5 & -74 & -120 & \underline{-2} \\ & -2 & -12 & 14 & 120 & \\ \hline 1 & 6 & -7 & -60 & 0 & \end{array}$$

Así $P(x) = x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 74x - 120 = (x+2)(x^3 + 6x^2 - 7x - 60)$

Se repite el proceso ahora para el polinomio $Q(x) = x^3 + 6x^2 - 7x - 60$

$Q(3) = (3)^3 + 6(3)^2 - 7(3) - 60 = 0$, así 3 es una raíz o cero de $Q(x)$ y se hace división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 6 & -7 & -60 & \underline{3} \\ & 3 & 27 & 60 & \\ \hline 1 & 9 & 20 & 0 & \end{array}$$

Luego entonces: $P(x) = (x+2)(x-3)(x^2 + 9x + 20) = (x+2)(x-3)(x+4)(x+5)$