1. Números complejos

Un número complejo está conformado por la combinación de un número real y un número imaginario.

$$\underset{\text{Parte real}}{\underset{\uparrow}{a}} \quad + \quad \underset{\text{Parte imaginaria}}{\underset{\uparrow}{bi}}$$

2. Números imaginarios

La unidad imaginaria está representada por la letra i, de tal forma que si este número se eleva al cuadrado (se multiplica por sí mismo) da un resultado negativo.

$$i^2 = i \cdot i = -1 \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{-1}$$

Ejemplos de números imaginarios.

$$i, \quad -2i, \quad \frac{1}{2}i, \quad \frac{3}{4}i$$

Ejemplos de números complejos.

$$A.\quad 1+i \quad B.\quad 12i-3i \quad C.\quad \sqrt{2}+\frac{1}{2}i \quad D.\quad \pi+\frac{3}{4}\pi i$$

Todos los números anteriores son la combinación de dos números, uno real y el otro imaginario.

Identificación de las partes de un número complejo

Número complejo	Parte real	Parte imaginaria
$5+3i$	5	3
$-4-2i$	-4	-2
$3i$	0	3
4	4	0

3. Conjugado de un número complejo

El conjugado de un número complejo es otro número complejo que se diferencia del anterior en el signo de la parte imaginaria. El conjugado de un número complejo $z = a+bi$ es entonces $\overline{z} = a-bi$

Número complejo	Conjugado
$3+4i$	$3-4i$
$-7+8i$	$-7-8i$
$9-2i$	$9+2i$
$-5-6i$	$-5+6i$
$3i$	$-3i$
$-5i$	$5i$

4. Operaciones con números complejos

Entre los números complejos se pueden realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

4.1. Suma de números complejos

Para sumar dos o más números complejos se suman, respectivamente las partes reales y las partes imaginarias. Esto es, si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos entonces:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplos: Sumar los siguientes números complejos:

1. $(3+6i)+(5+4i)=8+10i$
2. $(2-8i)+(-4+12i)=-2+4i$
3. $(-6-7i)+(3+5i)=-3-2i$
4. $(12-6i)+(-14+8i)=-2+2i$

4.2. Resta de números complejos

Para restar dos o más números complejos se restan, respectivamente las partes reales y las partes imaginarias. Esto es, si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos entonces:

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplos: Restar los siguientes números complejos:

1. $(8+4i)-(5+2i)=3+2i$
2. $(4-6i)-(-6+3i)=10-9i$
3. $(-6-6i)-(-10+2i)=4-8i$
4. $(9-6i)-(-1-8i)=10+2i$

4.3. Multiplicación de números complejos

1. Para multiplicar dos números complejos se realizan los siguientes pasos:
2. Se aplica la propiedad distributiva.
3. Se resuelven los paréntesis de i.
4. Se reducen términos semejantes.

En la multiplicación de los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ se tiene que:

$$z \cdot w = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos: Realizar las siguientes multiplicaciones entre números complejos:

1. $(3+4i)(5+2i)=15+6i+20i+8i^2=15+6i+20i+8(-1)=(15-8)+(6+20)i=7+26i$

2. $(-6+5i)(3-10i)=-18+60i+15i-50i^2=-18+60i+15i-50(-1)=(-18+50)+(60+15)i=32+75i$

3. $(-2+2i)(-3-5i)=6+10i-6i-10i^2=6+10i-6i-10(-1)=(6+10)+(10-6)i=16+4i$

4.4. Multiplicación de un número complejo por su conjugado

Como el conjugado del número complejo $z=c+di$ es $\overline{z}=c-di$, entonces:

$$z\cdot\overline{z}=(c+di)(c-di)=c^2-cdi+cdi-d^2i^2=c^2-d^2(-1)=c^2+d^2$$

El resultado anterior nos indica que: la multiplicación de un número complejo por su conjugado es igual a la suma del cuadrado de su parte real más el cuadrado de su parte imaginaria.

Ejemplos: Encuentre el resultado de multiplicar cada número complejo dado por su conjugado.

1. $5+4i$ 2. $3-7i$ 3. $-2-5i$

Solución

1. $(5+4i)(5-4i)=(5)^2+(4)^2=25+16=41$
2. $(3-7i)(3+7i)=(3)^2+(7)^2=9+49=58$
3. $(-2-5i)(-2+5i)=(-2)^2+(5)^2=4+25=29$

4.5. División de números complejos

Para dividir dos números complejos se multiplican tanto el dividendo como el divisor por el conjugado del divisor y luego, se resuelven las operaciones indicadas.

Si $z=a+bi$ y $w=c+di$ son dos números complejos, entonces:

$$\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

Ejemplos: Realizar las siguientes divisiones entre números complejos.

1. $\dfrac{6+4i}{2+1i}=\dfrac{(6+4i)(2-1i)}{(2+1i)(2-1i)}=\dfrac{12-6i+8i-4i^2}{2^2+1^2}=\dfrac{12-6i+8i-4(-1)}{4+1}=\dfrac{12-6i+8i+4}{5}=\dfrac{16+2i}{5}=\dfrac{16}{5}+\dfrac{2}{5}i$

2. $\dfrac{8-12i}{2-2i}=\dfrac{(8-12i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\dfrac{16+16i-24i-24i^2}{2^2+2^2}=\dfrac{16+16i-24i-24(-1)}{4+4}=\dfrac{40-8i}{8}=\dfrac{40}{8}-\dfrac{8}{8}i=5-i$

Ejemplos: Dados los números complejos $z_1=2-3i,\ z_2=-1+2i,\ z_3=5-7i$. Realizar:

1. z_1+z_2 2. z_1-z_2 3. $z_1\cdot z_2$ 4. $\dfrac{z_1}{z_2}$ 5. $z_1\cdot z_3-4z_2$ 6. $(z_1-z_3)\cdot z_2$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Dados tres números complejos z, *w*, *v* se cumple:

- **Cerraduras**: $z+w\in\mathbb{C}$ y $zw\in\mathbb{C}$
- **Conmutativa**: $z+w=w+z$ y $zw=wz$
- **Asociativas**: $(z+w)+v=z+(w+v)$ y $(zw)v=z(wv)$
- **Existencia del neutros**: Existe $0\in\mathbb{C}$ tal que $0+z=z+0=z$ y existe $1\in\mathbb{C}$ tal que $1z=z1=z$
- **Existencia inversos**: Para cada $z\in\mathbb{C}$ existe $-z\in\mathbb{C}$ tal que $z+(-z)=(-z)+z=-z+z=0$ y para cada $z\neq 0$, $z\in\mathbb{C}$ existe $\dfrac{1}{z}\in\mathbb{C}$ tal que $z\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z}z=1$

PROPIEDADES DEL CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dados dos números complejos z, *w* se cumple:

- Si $z=a+bi$, entonces $z+\overline{z}=2a$
- Si $z=a+bi$, entonces $z-\overline{z}=2bi$
- Si $z=a+bi$, entonces $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$
- $\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}$
- $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- $\overline{\overline{z}}=z$