

1. ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas.

Las soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen verdadera la ecuación, y al proceso de hallar las soluciones se le llama resolver la ecuación.

Para resolver una ecuación, se busca una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado de la igualdad o del signo “igual”.

Para obtener ecuaciones equivalentes se pueden realizar las siguientes operaciones:

- Sumar o restar la misma cantidad a ambos lados de la ecuación.

$$A = B \text{ si y solo si } A \pm C = B \pm C$$

- Multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por la misma cantidad diferente de cero.

$$A = B \text{ si y solo si } A \cdot C = B \cdot C$$
$$A = B \text{ si y solo si } A \div C = B \div C$$

2. ECUACIÓN LINEAL O DE PRIMER GRADO

Una ecuación de la forma $ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se llama ecuación lineal en una variable.

Para resolver la ecuación anterior basta con despejar la variable x así:

$$ax + b = 0$$

$$ax + b - b = 0 - b \text{ Sumamos } -b \text{ a ambos lados}$$

$$ax = -b$$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(-b) \text{ Multiplicamos por } \frac{1}{a} \text{ a ambos lados}$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Para resolver una ecuación lineal, generalmente se tienen en cuenta los siguientes pasos:

1. Se suprimen los paréntesis.
2. Se suprimen los denominadores.
3. Se hace la transposición de términos.
4. Se reducen los términos semejantes.
5. Se despeja la incógnita.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $3x + 5 = 32$

Solución

$$3x + 5 = 32$$

$$3x = 32 - 5$$

$$3x = 27$$

$$x = \frac{27}{3}$$

$$x = 9$$

2. $12x + 8 = 5x + 57$

Solución

$$12x + 8 = 5x + 57$$

$$12x - 5x = 57 - 8$$

$$7x = 49$$

$$x = \frac{49}{7}$$

$$x = 7$$

3. $x + 2(x + 1) + 3(x + 2) = 32$

Solución

$$x + 2(x + 1) + 3(x + 2) = 32$$

$$x + 2x + 2 + 3x + 6 = 32$$

$$6x + 8 = 32$$

$$6x = 32 - 8$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6}$$

$$x = 4$$

4. $\frac{x+3}{8} - \frac{x-3}{10} = \frac{x-5}{4} - 1$

Solución

Buscamos primero el m.c.m de 4, 8 y 10. Esto es:

$$\begin{array}{r|rrr} 8 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

El $m \cdot c \cdot m(4, 8, 10) = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$

Ahora multiplicamos a ambos lados de la igualdad por 40. Esto es:

$$\begin{aligned}40\left(\frac{x+3}{8}-\frac{x-3}{10}\right) &= 40\left(\frac{x-5}{4}-1\right) \\ \frac{40(x+3)}{8}-\frac{40(x-3)}{10} &= \frac{40(x-5)}{4}-40 \\ 5(x+3)-4(x-3) &= 10(x-5)-40 \\ 5x+15-4x+12 &= 10x-50-40 \\ 5x-4x-10x &= -50-40-15-12 \\ -9x &= -117 \\ x &= \frac{-117}{-9} \\ x &= 13\end{aligned}$$

5. $3 + \frac{2}{x} = 2 + \frac{4}{x}$

Solución

Multiplicamos a ambos lados de la igualdad por x . Esto es:

$$\begin{aligned}3 + \frac{2}{x} &= 2 + \frac{4}{x} \\ x\left(3 + \frac{2}{x}\right) &= x\left(2 + \frac{4}{x}\right) \\ 3x + \frac{2x}{x} &= 2x + \frac{4x}{x} \\ 3x + 2 &= 2x + 4 \\ 3x - 2x &= 4 - 2 \\ x &= 2\end{aligned}$$

6. $15 - 2(-4x - (-3x + 2) + 5(-2x + 4)) = 3(-x + 8)$

Solución

$$\begin{aligned}15 - 2(-4x - (-3x + 2) + 5(-2x + 4)) &= 3(-x + 8) \\ 15 - 2(-4x + 3x - 2 - 10x + 20) &= -3x + 24 \\ 15 - 2(-11x + 18) &= -3x + 24 \\ 15 + 22x - 36 &= -3x + 24 \\ 22x - 21 &= -3x + 24 \\ 22x + 3x &= 24 + 21 \\ 25x &= 45 \\ x &= \frac{45}{25} \\ x &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

3. EMPLEOS DE APLICACIÓN DE ECUACIONES LINEALES

1. Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

Solución

Si consideramos que la variable x representa años, entonces. Cuando el padre tenga $(35 + x)$, entonces su hijo tendrá $(5 + x)$.

Si la edad del padre triplica a la de su hijo, entonces se tiene que:

$$35 + x = 3 \cdot (5 + x)$$

$$35 + x = 15 + 3x$$

$$35 - 15 = 3x - x$$

$$20 = 2x$$

$$\frac{20}{2} = x$$

$$x = 10$$

Finalmente se tiene que al cabo de 10 años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo.

2. Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

Solución

$$2x - \frac{x}{2} = 54$$

$$2 \left(2x - \frac{x}{2} \right) = 2(54)$$

$$4x - x = 108$$

$$3x = 108$$

$$x = \frac{108}{3}$$

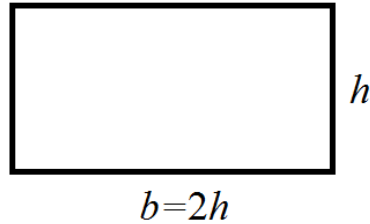
$$x = 36$$

Finalmente se tiene que el número buscado es 36.

3. La base de un rectángulo es el doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30cm?

Solución

De acuerdo con lo descrito en el enunciado se tiene que las dimensiones del rectángulo, son como se muestra en la siguiente figura.



Como el perímetro de un rectángulo viene dado por la expresión $P = 2(b + h)$, entonces al sustituir $b=2h$ y $P=30$ se tiene la siguiente ecuación lineal:

$$2(b + h) = P$$

$$2(2h + h) = 30$$

$$2(3h) = 30$$

$$6h = 30$$

$$h = \frac{30}{6}$$

$$h = 5$$

Finalmente se tiene entonces que la altura del rectángulo es de 5cm y que su base tiene un valor de 10cm.

4. Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 219.

Solución

- Sea x el primer número.
- El consecutivo de x es $x + 1$.
- El consecutivo de $x + 1$ es $(x + 1) + 1$, es decir, $x + 2$.

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 219$$

$$3x + 3 = 219$$

$$3x = 219 - 3$$

$$3x = 216$$

$$x = \frac{216}{3} = 72$$

Por tanto, los números son 72, 73 y 74.

5. Héctor guarda 25 euros en su alcancía, que supone sumar una cuarta parte del dinero que ya había. ¿Cuánto dinero hay en la alcancía?

Solución

- Llamamos x al dinero que había en la alcancía.
- 25€ es la cuarta parte de lo que había, es decir,

$$\frac{x}{4} = 25$$

$$x = 4(25)$$

$$x = 100$$

Por tanto, en la alcancía habían 100€ y ahora hay en total $100+25=125$ euros.

6. Una tienda vende en dos días la tercera parte de sus productos. Al día siguiente recibe del almacén la mitad de la cantidad de los productos vendidos, que son 15 unidades. ¿Cuántas unidades vendió en los dos primeros días? ¿Cuántas unidades hay en la tienda después de abastecerla?

Solución

Sea x el número inicial de productos, Entonces en los dos primeros días se venden

$$\frac{x}{3}$$

Al día siguiente se recibe la mitad de la cantidad vendida que es 15, es decir, tenemos la ecuación

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = 15$$

Hemos multiplicado por $1/2$ para obtener la mitad y resolvemos la ecuación. Esto es:

$$x = 6(15) = 90$$

En la tienda había 90 productos.

En los dos primeros días se venden:

$$\frac{x}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

La cantidad después de la venta y del abastecimiento es: $90 - 30 + 15 = 75$ productos.

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

- En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?
- Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?
- Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad del padre era el doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.
- Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.
- Marta tiene 15 años, que es la tercera parte de la edad de su madre. ¿Qué edad tiene la madre de Marta?
- ¿Cuánto mide una cuerda si su tercera cuarta parte mide 200 metros?
- Dado un número, la suma de su mitad, su doble y su triple es 55. ¿Qué número es?
- Daniel se gasta 105 mil pesos en un pantalón y una camisa. No sabe el precio de cada prenda, pero sí sabe que la camisa vale dos quintas partes de lo que vale el pantalón. ¿Cuánto fue al valor de cada prenda?