1. ECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$, recibe el nombre de **ecuación cuadrática o de segundo grado**.

Solucionar una ecuación cuadrática significa encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.
Toda ecuación cuadrática puede tener dos raíces reales diferentes, dos raíces complejas conjugadas o una sola raíz real.

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2+bx+c=0$, existen tres métodos principales que son: solución por factorización, solución por completación de cuadrados y solución por fórmula general.

En este caso vamos a considerar solamente las soluciones por factorización y por fórmula general.

1.1. SOLUCIÓN POR FACTORIZACIÓN

En este caso primero se expresar la ecuación $ax^2+bx+c=0$ como el producto de dos binomios y luego se iguala a cero cada factor. Finalmente, se despeja la variable o incógnita para encontrar las soluciones.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización.

1. $x(x+4)=77$

$$x(x+4)=77$$
$$x^2+4x-77=0$$
$$(x+11)(x-7)=0$$
$$x+11=0 \text{ ó } x-7=0$$
$$x=-11 \text{ ó } x=7$$

2. $x^2-11x+30=0$

$$(x-6)(x-5)=0$$
$$x-6=0 \text{ ó } x-5=0$$
$$x=6 \text{ ó } x=5$$

3. $5x^2-4x-1=0$

$$\frac{(5x)^2-4(5x)-5}{5}=0$$
$$\frac{(5x-5)(5x+1)}{5}=0$$
$$\frac{\cancel{5}(x-1)(5x+1)}{\cancel{5}}=0$$
$$(x-1)(5x+1)=0$$
$$x-1=0 \text{ ó } 5x+1=0$$
$$x=1 \text{ ó } x=-\frac{1}{5}$$

4. $6x^2-11x+3=0$

$$\frac{(6x)^2-11(6x)+18}{6}=0$$
$$\frac{(6x-2)(6x-9)}{6}=0$$
$$\frac{2(3x-1)3(2x-3)}{6}=0$$
$$\frac{\cancel{6}(3x-1)(2x-3)}{\cancel{6}}=0$$
$$(3x-1)(2x-3)=0$$
$$3x-1=0 \text{ ó } 2x-3=0$$
$$x=\frac{1}{3} \text{ ó } x=\frac{3}{2}$$

1.2. SOLUCIÓN POR FÓRMULA GENERAL

Las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, donde $a\neq 0$, están dadas por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Así la ecuación cuadrática tiene dos soluciones que son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ están determinadas por el radicando b^2-4ac en la fórmula cuadrática. La cantidad b^2-4ac se llama d**iscriminante**.

Según el valor del discriminante se tienen tres opciones que son:

1. Si $b^2-4ac>0$ la ecuación tiene dos raíces reales y diferentes.
2. Si $b^2-4ac=0$ la ecuación tiene una raíz real repetida $\left(x=\frac{-b}{2a}\right)$.
3. Si $b^2-4ac<0$ la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por fórmula general.

1. $2x^2+4x-6=0$

Aplicamos la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(2)(-6)}}{2(2)}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{4}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{4}=\frac{-4\pm 8}{4}$$

$$x_1=\frac{-4+8}{4}=\frac{4}{4}=1 \quad y \quad x_2=\frac{-4-8}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

2. $\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x}=1$

En este caso tenemos que:

$$\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x}=1\Rightarrow\frac{4x-(x-1)}{x(x-1)}=1\Rightarrow 4x-x+1=x^2-x\Rightarrow x^2-x-4x+x-1=0\Rightarrow x^2-4x-1=0$$

Seguidamente aplicamos la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{(4)(5)}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=\frac{4}{2}\pm\frac{2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}$$

$x_1=2+\sqrt{5}\quad y\quad x_2=2-\sqrt{5}$

3. $3x^2-6x+9=0$

Aplicamos la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(9)}}{2(3)}=\frac{6\pm\sqrt{36-108}}{6}$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{-72}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{(36)(2)(-1)}}{6}=\frac{6\pm6\sqrt{2}i}{6}=\frac{6}{6}\pm\frac{6\sqrt{2}i}{6}=1\pm\sqrt{2}i$$

$x_1=1+\sqrt{2}i\quad y\quad x_2=1-\sqrt{2}i$

4. $4x^2-5x+1=0$

Aplicamos la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(4)(1)}}{2(4)}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{5\pm3}{8}$$

$$x_1=\frac{5+3}{8}=\frac{8}{8}=1\quad y\quad x_2=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

5. $4x^2-10x-6=0$

Aplicamos la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(4)(-6)}}{2(4)}=\frac{10\pm\sqrt{100+96}}{8}$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{196}}{8}=\frac{10\pm14}{8}$$

$$x_1=\frac{10+14}{8}=\frac{24}{8}=3\quad y\quad x_2=\frac{10-14}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$