

Coordinación Matemática básica

Taller 2023-1

Tema : Sistemas de ecuaciones, Desigualdades, Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

1. Hallar la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 7y = 28 \\ y = \frac{2}{7}x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y + 1 = 0 \\ x + 3x + 9 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 64x + y = 1 \\ x^3 - y = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y - x = 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} y = x(x^2 - 6x + 8) \\ y + 4 = (x - 2)^2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x - y^2 = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

n) $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ x = y^2 \end{cases}$

2. Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución

a. $3x + 11 < 5$

b. $0 < 5 - 2x$

c. $6 - x \geq 2x - 9$

d. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$

e. $2(7x - 3) \leq 8x - 5$

f. $4 - 3x \leq -(1 + 8x)$

g. $-1 < 2x - 5 \leq 7$

h. $-2 \leq 8 - 2x < 7$

i. $\frac{-1}{6} \leq \frac{5-2x}{3} < 9$

3. Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución

a. $x(2x + 7) \geq 0$

b. $x^2 - 3x \leq 18$

c. $2x^2 + x \geq 1$

d. $x^2 > 3(x + 6)$

e. $4 \leq x^2$

f. $x^3 - 4x \geq 0$

g. $\frac{x-3}{x+1} \geq 0$

h. $\frac{2x+1}{x-5} \leq 3$

i. $\frac{4}{x} < x$

j. $1 + \frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{x}$

k. $\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}$

4. Escribir la expresión exponencial en forma logarítmica y la logarítmica en forma exponencial

a. $3^4 = 81$

b. $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

c. $32^{0.2} = 2$

d. $\log_2 128 = 7$

e. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

f. $\log_b b^2 = 2$

5. Use la ley de los logaritmos para escribir la expresión como un solo logaritmo

a. $\log_{10} 2 - 2 \log_{10} 5$

b. $3 \log_2 x + 2 \log_2 z - \log_2 x^2 z^3$

c. $\frac{1}{2} \log_5 49 - \frac{1}{3} \log_5 8 + 13 \log_5 1$

d. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2 \ln x^3 - 4 \ln y$

6. Aplicar las leyes de los logaritmos de modo que la expresión no tenga ni productos, ni cocientes, ni raíces.

a. $y = \sqrt{\frac{(2x+1)(3x-1)}{4x+3}}$

b. $y = \frac{(x^3-5)^3(x^4+3x^{2+1})^8}{\sqrt{x}(3x+3)^9}$

c. $y = \frac{\sqrt[3]{(2x-4)^5}}{x^3(x^2-1)}$

d. $y = \sqrt{x \sqrt{y \sqrt{z}}}$

e. $y = \frac{10^x}{x^3-9x}$

7. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas

a. $10^{-2x} = \frac{1}{10\,000}$

b. $e^{5x-2} = 30$

c. $2^x 3^x = 36$

d. $2^{x^2} = 8^{2x-3}$

e. $5 - 10^x = 0$

- f. $4^x = 5^{x-16}$
 g. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$
 h. $e^{2x} - 3e^x = -2$
 i. $\ln x = \ln 5 + \ln 9$
 j. $\log_{10} \frac{1}{x^2} = 2$
 k. $\log_3 \sqrt{x^2 + 17} = 2$
 l. $\log_{10} x = 1 + \log_{10} \sqrt{x}$
 m. $\log_2(x - 3) - \log_2(2x + 1) = -\log_2 4$
 n. $\log_6 2x - \log_6(x + 1) = 0$
 o. $\ln(x + 3) + \ln(x - 4) - \ln x = \ln 3$
 p. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$
 q. $4 - \log(3 - x) = 3$
 r. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$
 s. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$
 t. $\log x + \log(x - 3) = 1$

8. Completa la siguiente tabla

Grados	Radianes
15°	
45°	
215°	
10°	
-120°	
	$\frac{2}{9}\pi$
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{5}{4}\pi$
	3.1
	$\frac{5}{12}\pi$

9. Dibuje un triángulo rectángulo apropiado para obtener el valor de las demás relaciones trigonométricas

- a. $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
 b. $\text{sen}(\theta) = \frac{12}{13}$
 c. $\tan(\theta) = \frac{2}{5}$
 d. $\cot(\theta) = \frac{1}{7}$

10. Se proporciona el valor de una función y el cuadrante en el que se encuentra hallar el valor de las demás y

- a. $\cos(\theta) = \frac{-2}{3}$, θ está en III cuadrante
 b. $\text{csc}(\theta) = -10$, θ está en IV cuadrante
 c. $\text{sen}(\theta) = \frac{-1}{5}$, $\cos(\theta) > 0$

d. $\tan(\theta) = 8, \sec(\theta) > 0$

11. Hacer la sustitución indicada y formule sin radicales la expresión

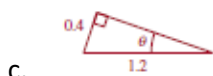
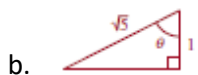
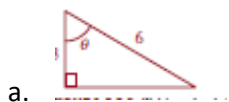
a. $\sqrt{a^2 - x^2}, x = a \cos(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi$

b. $\sqrt{x^2 - a^2}, x = a \sec(\theta), 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

c. $\sqrt{16 - 25x^2}, x = \frac{4}{5} \sin(\theta), 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

d. $\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}, x = \sqrt{3} \sec(\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

12. Determine el valor de las 6 funciones trigonométricas del ángulo θ del triángulo



13. Verificar las siguientes identidades

a. $\frac{\tan(B)}{\sec(B)} = \sin(B)$

b. $\frac{\cot(A) \sec(A)}{\csc(A)} = 1$

c. $\tan(x) + \cot(x) = \sec(x) \csc(x)$

d. $(1 - \cos(x))(1 + \cos(x)) = \frac{1}{\csc^2(x)}$

e. $\frac{(\sin(x) + \cos(x))^2}{\sin^2(x) - \cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x) - \cos(x))^2}$

f. $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$

g. $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$

h. $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sec(x) + \csc(x)} = \sin(x)\cos(x)$

i. $\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = 2\csc(x)$

j. $2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

k. $\frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$

l. $\frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1} = \frac{-\cos^2(x)}{(\sin(x) + 1)^2}$

m. $\sec(t) \csc(t) (\tan(t) + \cot(t)) = \sec^2(t) + \csc^2(t)$

n. $\frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} = \sec(x) + \tan(x)$

o. $\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} - \frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)} = 4\tan(x)\sec(x)$

p. $\frac{\sin^3(x) + \cos^3(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = 1 - \sin(x)\cos(x)$

14. Hallar las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$

a. $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

b. $2\sin(x) = -1$

c. $\sqrt{3} \cot(x) = 1$

d. $2\sin(x) = \sqrt{2}$

e. $\cos^2(x) - 1 = 0$

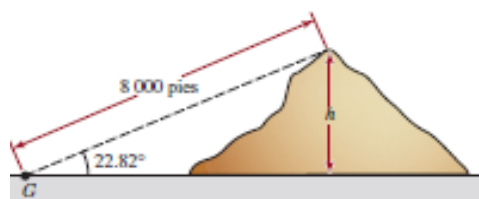
f. $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

g. $\tan^2(x) + (\sqrt{3} - 1)\tan(x) - \sqrt{3} = 0$

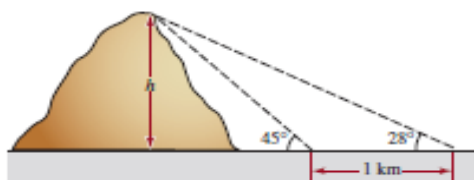
- h. $\cos(2x) = -1$
- i. $\cos(2x) + \text{sen}^2(x) = 1$
- j. $\text{sen}(x) + \cos(x) = 0$
- k. $2\cos^2(x) + \text{sen}(x) = 1$
- l. $3\tan^2(x) - 1 = 0$
- m. $2\cos^2(x) - 1 = 0$
- n. $\text{csc}^2(x) - 4 = 0$
- o. $3\text{sen}^2(x) - 7\text{sen}(x) + 2 = 0$
- p. $\text{sen}(x) = \cos(x)$
- q. $3\tan^3(x) = \tan(x)$
- r. $3\tan^3(x) - 3\tan^2(x) - \tan(x) + 1 = 0$
- s. $4\text{sen}(x)\cos(x) + 2\text{sen}(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$

15. Resolver usando las relaciones trigonométricas los problemas siguientes

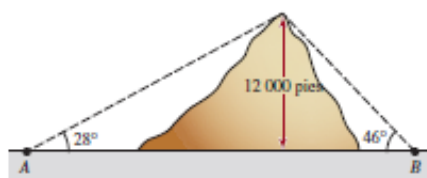
- a. Un edificio proyecta una sombra de 20m de longitud. Si el ángulo de la punta de la sombra a un punto de la parte alta del edificio es de 69° . ¿qué altura tiene el edificio?
- b. Un topógrafo usa un geodímetro para medir la distancia en línea recta, desde un punto en el suelo hasta la cumbre de una montaña. ¿Qué altura tiene la montaña? Ver Figura.



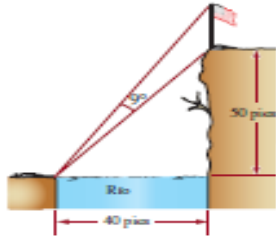
- c. Halle la altura h de la montaña, con la información dada en la siguiente figura.



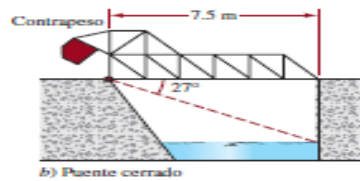
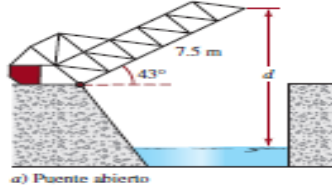
- d. La parte superior de una escalera de 20 pies está cargada contra la orilla del techo de una casa. Si el ángulo de inclinación de la escalera con respecto a la horizontal es de 51° . ¿cuál es la altura aproximada de la casa, y cuál es la distancia del pie de la escalera a la base de la casa?
- e. Un tramo de una carretera de 26 400 pies sube a una montaña de 4000 pies de altura. Determine el ángulo que forma la carretera con la horizontal.
- f. Unos observadores en dos pueblos A y B a cada lado de una montaña de 12 000 pies de altura, miden ángulos de elevación entre el suelo y la cumbre de la montaña. Suponga que los pueblos y la cumbre de la montaña están en el mismo plano vertical, calcule la distancia entre ellos. Ver figura anexa.



- g. Una bandera está a la orilla de un acantilado de 50 pies de altura en la orilla de un río de 40 pies de ancho. Un observador en la orilla opuesta del río mide un ángulo de 9° entre su visual a la punta del asta y su visual a la base del asta. Calcule la altura del asta. Ver figura.



- h. Un puente levadizo mide 7.5 m de orilla a orilla y cuando se abre forma un ángulo de 43° con la horizontal, como se muestra en la figura. Cuando el puente se cierra, el ángulo de depresión de la orilla a un punto en la superficie del agua bajo el extremo opuesto es de 27° . Cuando el puente está totalmente abierto, ¿cuál es la distancia d entre el punto más alto del puente y el agua?



- i. Un árbol de 96 pies proyecta una sombra de 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?

Tomado del libro: STEWART, James y otros. Precálculo. Sexta edición. México: Thomson.