1. Racionalización

Definición 1.1 *Racionalizar una expresión consiste en eliminar un radical de una expresión. En álgebra normalmente se racionaliza el denominador, pero en cálculo a veces es importante racionalizar el numerador.*

Observación: 1) El procedimiento de racionalización implica la multiplicación de la fracción por 1 escrito en forma especial.
2) Vamos a explicar como se racionaliza el denominador, de igual forma se haría para el numerador:

1.1. Caso 1: Monomio de la forma $\sqrt[n]{x^m}$ donde $m < n$

Cuando el denominador de la fracción tiene un monomio de la forma $\sqrt[n]{x^m}$ donde $m < n$.
En este caso se multiplica el numerador y denominador por $\sqrt[n]{x^{n-m}}$.
Así en el denominador se tendrá $\sqrt[n]{x^m} * \sqrt[n]{x^{n-m}} = \sqrt[n]{x^m x^{n-m}} = \sqrt[n]{x^{m+n-m}} = \sqrt[n]{x^n} = x$

Ejemplo 1.2 *Racionalizar el denominador y simplificar en cada caso:*

1. $\dfrac{12}{\sqrt[7]{18}} = \dfrac{12}{\sqrt[7]{2*3^2}} * \dfrac{\sqrt[7]{2^6*3^5}}{\sqrt[7]{2^6*3^5}} = \dfrac{12\sqrt[7]{2^6*3^5}}{\sqrt[7]{2^7*3^7}} = \dfrac{12\sqrt[7]{2^6*3^5}}{6} = 2\sqrt[7]{2^6*3^5}$

2. $\dfrac{3x^2y^3}{\sqrt[5]{x^2}} = \dfrac{3x^2y^3}{\sqrt[5]{x^2}} * \dfrac{\sqrt[5]{x^{5-2}}}{\sqrt[5]{x^{5-2}}} = \dfrac{3x^2y^3\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^{2+3}}} = \dfrac{3x^2y^3\sqrt[5]{x^3}}{x} = 3xy^3\sqrt[5]{x^2}$

3. $\dfrac{20a^6b}{\sqrt[4]{5^2ab^3}} = \dfrac{20a^6b}{\sqrt[4]{5^2ab^3}} * \dfrac{\sqrt[4]{5^2a^3b}}{\sqrt[4]{5^2a^3b}} = \dfrac{20a^6b\sqrt[4]{5^2a^3b}}{\sqrt[4]{5^4a^4b^4}} = \dfrac{20a^6b\sqrt[4]{5^2a^3b}}{5ab} = 4a^5\sqrt[4]{5^2a^3b}$

4. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{z^{23}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{z^{21}*z^2}} = \dfrac{1}{z^7\sqrt[3]{z^2}} * \dfrac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{z^7*z} = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{z^8}$

1.2. Caso 2: Binomio de la forma $a \pm b\sqrt{x}$

Cuando el denominador de la fracción tiene es un binomio de la forma $a \pm b\sqrt{x}$.
En este caso se multiplica el numerador y el denominador por $a \mp b\sqrt{x}$, conocido como el conjugado o factor racionalizante, así en el denominador se tendrá una diferencia de cuadrados $(a \pm b\sqrt{x})(a \mp b\sqrt{x}) = a^2 - b^2x$ eliminando el radical.

Ejemplo 1.3 *Racionalizar el denominador y simplificar en cada caso:*

1. $\dfrac{6}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{6}{1-\sqrt{3}} * \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{6(1+\sqrt{3})}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{6(1+\sqrt{3})}{1-3} = \dfrac{6(1+\sqrt{3})}{-2} = -3(1+\sqrt{3})$

2. $\dfrac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}} = \dfrac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}} * \dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}} = \dfrac{15\sqrt{2}(2\sqrt{7}+3\sqrt{2})}{4(7)-9(2)} = \dfrac{15\sqrt{2}(2\sqrt{7}+3\sqrt{2})}{10} = \dfrac{3\sqrt{2}(2\sqrt{7}+3\sqrt{2})}{2}$
$= \dfrac{6\sqrt{14}+9(2)}{2} = \dfrac{2(3\sqrt{14}+9)}{2} = 3\sqrt{14}+9$

3. $\dfrac{3x^2}{\sqrt{y}+x} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{y}+x} * \dfrac{\sqrt{y}-x}{\sqrt{y}-x} = \dfrac{3x^2(\sqrt{y}-x)}{y-x^2}$

4. $\dfrac{y\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}} = \dfrac{y\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}} * \dfrac{y\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{y\sqrt{x}+x\sqrt{y}} = \dfrac{(y\sqrt{x}+x\sqrt{y})^2}{y^2x-x^2y} = \dfrac{y^2x+2xy\sqrt{xy}+x^2y}{y^2x-x^2y} = \dfrac{xy(y+2\sqrt{xy}+x)}{xy(y-x)}$
$= \dfrac{y+2\sqrt{xy}+x}{y-x}$

1.3. Caso 3: Binomio de la forma $a \pm b\sqrt[3]{x}$

Cuando el denominador de la fracción tiene es un binomio de la forma $a \pm b\sqrt[3]{x}$.
En este caso se multiplica el numerador y el denominador por $a^2 \mp ab\sqrt[3]{x} + b^2(\sqrt[3]{x})^2$, conocido como el conjugado o factor racionalizante, así en el denominador se tendrá una suma (resta) de cubos
$(a \pm b\sqrt[x]{x})(a^2 \mp ab\sqrt[3]{x} + b^2(\sqrt[3]{x})^2) = a^3 \pm b^3x$ eliminando el radical.

Ejemplo 1.4 *Racionalizar el denominador y simplificar en cada caso:*

1. $\dfrac{10}{2-\sqrt[3]{5}} = \dfrac{12}{2-\sqrt[3]{5}} * \dfrac{2^2+2\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2}{2^2+2\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2} = \dfrac{12(4+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{2^3-(\sqrt[3]{5})^2} = \dfrac{12(4+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{3}$
$= 4(4+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})$

2. $\dfrac{16x^4+2xy}{2x+\sqrt[3]{y}} = \dfrac{16x^4+2xy}{2x+\sqrt[3]{y}} * \dfrac{(2x)^2-2x\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2}{(2x)^2-2x\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2} = \dfrac{2x(8x^3+y)(4x^2-2x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})}{8x^3+y}$
$= 2x(4x^2-2x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})$

3. $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} * \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \dfrac{(x+y)(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{x-y}$
$= (x+y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$