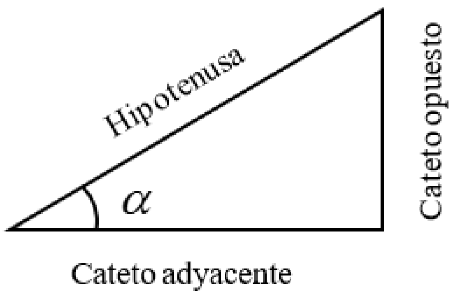
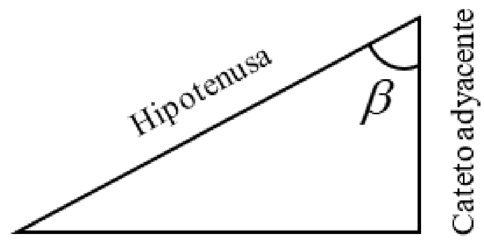
Triángulo rectángulo

Un triángulo rectángulo se caracteriza por tener un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90° y dos ángulos agudos. Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a este ángulo se llama hipotenusa.
Si uno toma un ángulo interior, que no sea el ángulo recto, entonces el cateto que forma dicho ángulo será el cateto adyacente (ca), mientras que el otro será el cateto opuesto (co).





Razones trigonométricas

Entre los lados de un triángulo rectángulo se pueden plantear seis razones que son:

$$\frac{a}{b},\frac{a}{c},\frac{b}{a},\frac{b}{c},\frac{c}{a},\frac{c}{b}$$

Estas razones se denominan **razones trigonométricas**. Cada razón trigonométrica recibe un nombre de acuerdo con el ángulo que se seleccione.

Las razones trigonométricas correspondientes al ángulo α son:

$$\text{seno } de\ \alpha \Rightarrow sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{co}{h}$$

$$\text{coseno } de\ \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{ca}{h}$$

$$\text{tangente } de\ \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{co}{ca}$$

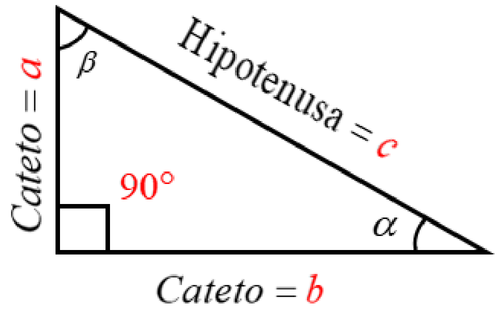
$$\text{cosecante } de\ \alpha \Rightarrow \csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{h}{co}$$

$$\text{secante } de\ \alpha \Rightarrow \sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{h}{ca}$$

$$\text{cotangente } de\ \alpha \Rightarrow \cot\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{ca}{co}$$

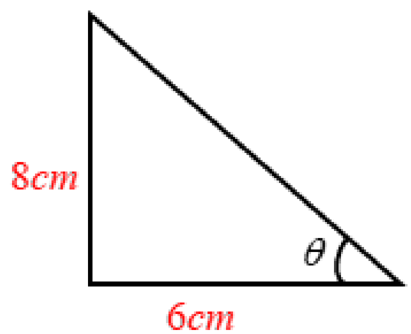
Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras establece que: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo 1: Determine el valor de las 6 razones trigonométricas para el ángulo θ del triángulo mostrado en la figura.



Solución

En este caso debemos buscar primero la hipotenusa.

$$h = \sqrt{(8cm)^2 + (6cm)^2} = \sqrt{64cm^2 + 36cm^2} = \sqrt{100cm^2} = 10cm$$

Luego las 6 razones trigonométricas son:

$$sen\theta = \frac{8}{10} \qquad \csc\theta = \frac{10}{8}$$

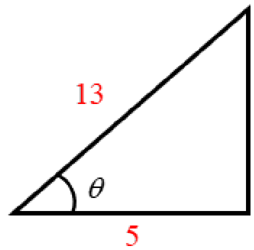
$$\cos\theta = \frac{6}{10} \qquad \sec\theta = \frac{10}{6}$$

$$\tan\theta = \frac{8}{6} \qquad \cot\theta = \frac{6}{8}$$

Ejemplo 2: Calcular el valor de las demás razones trigonométricas si $\sec\theta = \frac{13}{5}$:

Solución

Como $\sec\theta = \frac{h}{ca} = \frac{13}{5}$, entonces podemos usar el teorema de Pitágoras para encontrar el cateto opuesto.



$$co^2 + ca^2 = h^2 \Rightarrow co = \sqrt{h^2 - ca^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{160 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

Luego las 6 razones trigonométricas son:

$$sen\theta = \frac{12}{13} \qquad \csc\theta = \frac{13}{12}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{13} \qquad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

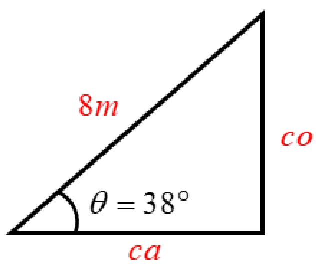
$$\tan\theta = \frac{12}{5} \qquad \cot\theta = \frac{5}{12}$$

Ejemplo 3: Un arquitecto construye una rampa de 8m de largo contra una pared formado un ángulo de 38° respecto al piso.

a. ¿Cuál es la altura de la rampa?
b. ¿Cuál es la distancia entre la base de la rampa y la pared?

Solución

Realizamos en primera instancia una ilustración de la situación.



Ahora usamos la razón trigonométrica asociada a la función seno para encontrar la altura de la rampa.

$$sen38° = \frac{co}{8m} \Rightarrow co = (8m)sen(38°) = (8m)(0.62) = 4.96m$$

Finalmente, para calcular la distancia entre la base de la rampa y la pared usamos la razón trigonométrica asociada a la función coseno.

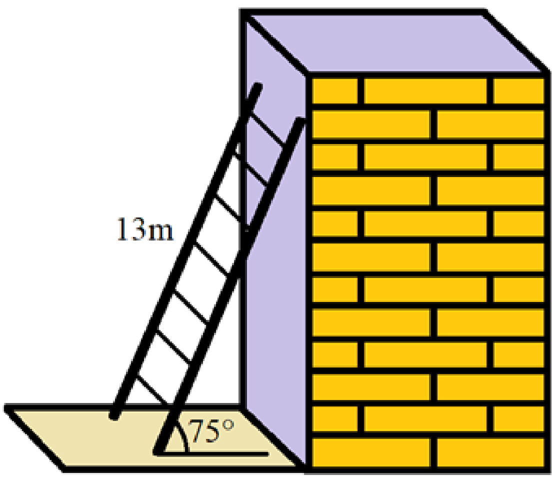
$$\cos 38° = \frac{ca}{8m} \Rightarrow ca = (8m)\cos(38°) = (8m)(0.79) = 6.32m$$

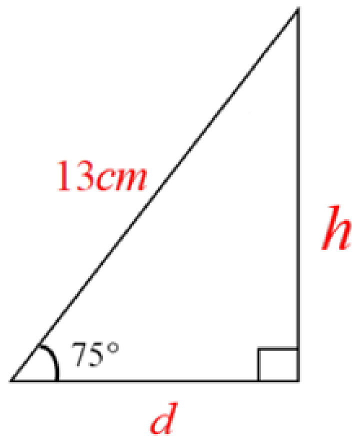
Ejemplos 4: Una escalera mide 13m de largo y se encuentra apoyada en una pared, de modo que el ángulo que forma con el suelo es de 75°.

a. ¿Qué altura alcanza la escalera en estas condiciones?
b. ¿Cuánto está separada de la pared?

Solución

Realizamos en primera instancia una ilustración de la situación.





Ahora usamos la razón trigonométrica asociada a la función seno para encontrar el valor de h.

$$sen75° = \frac{h}{13m} \Rightarrow h = (13m)\,sen(75°) = (13m)(0.97) = 12.61m$$

Finalmente, para calcular el valor del lado d usamos la razón trigonométrica asociada a la función tangente.

$$\tan 75° = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\tan 75°} = \frac{12.61m}{3.73} = 3.38m$$