1. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales consiste en un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado que contienen dos o más incógnitas, dichas ecuaciones están relacionadas entre sí ya que el valor de las incógnitas, satisfacen a todas las ecuaciones del sistema al mismo tiempo.

Un sistema de ecuaciones puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

Sistema de ecuaciones lineales de 2×2

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, es un arreglo de la forma.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

Para encontrar la solución o soluciones de un sistema de ecuaciones de 2x2, se pueden utilizar varios métodos como: el método de sustitución, el método de igualación, el método de eliminación o reducción, el método por determinantes y el método gráfico.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por este método, se realizan los siguientes pasos:

1. Se despeja una de las variables de cualquiera de las ecuaciones dadas.
2. Se reemplaza la ecuación obtenida en el primer paso, en la otra ecuación y se resuelve.
3. Se encuentra el valor de la otra variable, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema, el valor de la variable que se encontró en el segundo paso.

Ejemplos: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 mediante el método de sustitución.

$$1.\begin{cases} 2x+y=1 & (1) \\ 3x-2y=12 & (2) \end{cases} \quad 2.\begin{cases} 5x-3y=24 & (1) \\ 3x+5y=28 & (2) \end{cases} \quad 3.\begin{cases} 2x+6y=-1 & (1) \\ x+8y=2 & (2) \end{cases} \quad 4.\begin{cases} 8a-3b=-3 & (1) \\ 5a-2b=-2 & (2) \end{cases}$$

Solución del ejemplo 1

$$1.\begin{cases} 2x+y=1 & (1) \\ 3x-2y=12 & (2) \end{cases}$$

Despejamos y de la ecuación (1)

$$2x+y=1$$

$$\boxed{y=1-2x} \quad (3)$$

Ahora sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$3x-2(1-2x)=12 \quad \Rightarrow \quad 3x-2+4x=12$$

$$3x+4x=12+2 \quad \Rightarrow \quad 7x=14 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{14}{7}$$

$$\boxed{x=2} \quad (4)$$

Finalmente se sustituye la ecuación (4) en la ecuación (3).

$$y=1-2(2) \quad \Rightarrow \quad y=1-4$$

$$\boxed{y=-3} \quad (5)$$

Solución del ejemplo 2

$$2.\begin{cases} 5x-3y=24 & (1) \\ 3x+5y=28 & (2) \end{cases}$$

Despejamos x de la ecuación (1)

$$5x-3y=24$$

$$5x=24+3y$$

$$\boxed{x=\frac{24+3y}{5}} \quad (3)$$

Ahora sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$3\left(\frac{24+3y}{5}\right)+5y=28 \quad \Rightarrow \quad \frac{72+9y}{5}+5y=28$$

$$\frac{72+9y}{5}+\frac{5y}{1}=28 \quad \Rightarrow \quad \frac{72+9y+25y}{5}=28$$

$$72+9y+25y=28(5) \quad \Rightarrow \quad 72+9y+25y=140$$

$$9y+25y=140-72 \quad \Rightarrow \quad 34y=68 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{68}{34}$$

$$\boxed{y=2} \quad (4)$$

Finalmente se sustituye la ecuación (4) en la ecuación (3).

$$x=\frac{24+3(2)}{5} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{24+6}{5}=\frac{30}{5}$$

$$\boxed{x=6} \quad (5)$$

Solución del ejemplo 3

$$3. \begin{cases} 2x+6y=-1 & (1) \\ x+8y=2 & (2) \end{cases}$$

Despejamos x de la ecuación (2)

$$x+8y=2$$

$$\boxed{x=2-8y} \quad (3)$$

Ahora sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$2(2-8y)+6y=-1 \quad \Rightarrow \quad 4-16y+6y=-1$$

$$-16y+6y=-1-4 \quad \Rightarrow \quad -10y=-5 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-5}{-10}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Finalmente se sustituye la ecuación (4) en la ecuación (3).

$$x=2-8\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x=2-\frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad x=2-4$$

$$\boxed{x=-2} \quad (5)$$

Solución del ejemplo 4

$$4. \begin{cases} 8a-3b=-3 & (1) \\ 5a-2b=-2 & (2) \end{cases}$$

Despejamos a de la ecuación (1)

$$8a-3b=-3$$

$$8a=-3+3b$$

$$\boxed{a=\frac{-3+3b}{8}} \quad (3)$$

Ahora sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (2)

$$5\left(\frac{-3+3b}{8}\right)-2b=-2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-15+15b}{8}-2b=-2$$

$$\frac{-15+15b}{8}-\frac{2b}{1}=-2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-15+15b-16b}{8}=-2$$

$$-15+15b-16b=-2(8) \quad \Rightarrow \quad -15+15b-16b=-16$$

$$15b-16b=-16+15 \quad \Rightarrow \quad -b=-1$$

$$\boxed{b=1} \quad (4)$$

Finalmente se sustituye la ecuación (4) en la ecuación (3).

$$a=\frac{-3+3(1)}{8} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{-3+3}{8}=\frac{0}{8}$$

$$\boxed{a=0} \quad (5)$$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN O REDUCCIÓN

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por este método, se realizan los siguientes pasos:

1. Se multiplican los términos de una o ambas ecuaciones por constantes escogidas para que los coeficientes de x o de y se diferencien solo en el signo.
2. Se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante.
3. Se encuentra el valor de la otra variable reemplazando en algunas de las ecuaciones, el valor de la variable encontrada en el segundo paso.

Ejemplos: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 mediante el método de eliminación o reducción.

$$1.\begin{cases}8x-3y=-3 & (1)\\ 5x-2y=-1 & (2)\end{cases} \quad 2.\begin{cases}a-2b=4 & (1)\\ 2a+3b=1 & (2)\end{cases} \quad 3.\begin{cases}3m+5n=10 & (1)\\ 3m-2n=3 & (2)\end{cases} \quad 4.\begin{cases}5a+b=8 & (1)\\ 3a-4b=14 & (2)\end{cases}$$

Solución del ejemplo 1

$$1.\begin{cases}8x-3y=-3 & (1)\\ 5x-2y=-1 & (2)\end{cases}$$

En este caso multiplicamos la ecuación (1) por 2 y la segunda ecuación por -3 para eliminar la variable y.

Al multiplicar la ecuación (1) por 2 tenemos.

$$16x-6y=-6 \quad (3)$$

Ahora de la ecuación (2) multiplicada por (-3) resulta.

$$-15x+6y=3 \quad (4)$$

Seguidamente sumamos las ecuaciones (3) y (4).

$$
\begin{array}{rl}
+ & 16x - \cancel{6y} = -6 \\
 & -15x + \cancel{6y} = 3 \\
\hline
 & \boxed{x \quad = -3} \qquad (5)
\end{array}
$$

Finalmente se sustituye la ecuación (5) en la ecuación (2).

$$5x - 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad 5(-3) - 2y = -1$$

$$-15 - 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad -2y = -1 + 15$$

$$-2y = 14 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{14}{-2}$$

$$\boxed{y = -7} \quad (6)$$

Solución del ejemplo 2

$$2. \begin{cases} a - 2b = 4 & (1) \\ 2a + 3b = 1 & (2) \end{cases}$$

En este caso solamente vamos a multiplicar la ecuación (1) por -2 para eliminar la variable a.

Al multiplicar la ecuación (1) por -2 tenemos.

$$-2a + 4b = -8 \qquad (3)$$

Ahora sumamos las ecuaciones (2) y (3).

$$
\begin{array}{rl}
+ & \cancel{2a} + 3b = 1 \\
 & -\cancel{2a} + 4b = -8 \\
\hline
 & 7b \quad = -7
\end{array}
$$

$$b = \frac{-7}{7}$$

$$\boxed{b = -1} \qquad (4)$$

Finalmente se sustituye la ecuación (4) en la ecuación (1).

$$a - 2b = 4 \quad \Rightarrow \quad a - 2(-1) = 4$$

$$a + 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 4 - 2$$

$$\boxed{a = 2} \quad (5)$$

MÉTODO DE DETERMINANTES

REGLA DE CRAMER

Es un método que se emplea para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando determinantes. Este método se describe de la siguiente forma: si tenemos un sistema de ecuaciones de 2x2 de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

Se cumple entonces que:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{\text{Determinante del sistema}}}=\frac{ce-fb}{ae-db} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{\text{Determinante del sistema}}}=\frac{af-dc}{ae-db}$$

- Para formar el determinante del sistema se escriben los coeficientes de las variables. Este determinante se escribe en el denominador de ambas expresiones.
- Para formar el determinante del numerador para la variable *x*, se escribe en la primera columna los términos independientes y en la segunda columna los coeficientes de la variable *y*.
- Para formar el determinante del numerador para la variable *y*, se escribe en la primera columna los coeficientes de la variable *x*, y en la segunda columna los términos independientes.

Ejemplos: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 utilizando la regla de Cramer o método de determinantes.

1. $\begin{cases} 2x+6y=-1 \\ x+8y=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 8x-3y=-3 \\ 5x-2y=-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3m+5n=10 \\ 3m+2n=4 \end{cases}$

Solución del ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x+6y=-1 \\ x+8y=2 \end{cases}$$

En este caso se tiene que *a*= 2, *b*= 6, c= -1, d= 1, e= 8 y *f*= 2. Luego entonces:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}=\frac{(-1)(8)-(2)(6)}{(2)(8)-(1)(6)}=\frac{-8-12}{16-6}=\frac{-20}{10}=-2$$

Ahora encontramos el valor de la variable y. Esto es:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}=\frac{(2)2-(1)(-1)}{(2)(8)-(1)(6)}=\frac{4+1}{16-6}=\frac{5}{10}=0,5$$

Solución del ejemplo 2

$$\begin{cases} 8x-3y=-3 \\ 5x-2y=-1 \end{cases}$$

En este caso se tiene que *a*= 8, *b*= -3, c= -3, d= 5, e= -2 y *f*= -1. Luego entonces:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(-3)(-2)-(-1)(-3)}{(8)(-2)-(5)(-3)}=\frac{6-3}{-16+15}=\frac{3}{-1}=-3$$

Ahora encontramos el valor de la variable y. Esto es:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{(8)(-1)-(5)(-3)}{(8)(-2)-(5)(-3)}=\frac{-8+15}{-16+15}=\frac{7}{-1}=-7$$