INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

Matemáticas Básicas

Potenciación y Radicación

Grupo de docentes de Matemáticas Básicas

1. Potenciación

Introducción Así como cuando se tiene una suma repetida $x + x + x + x + x$ se expresa más fácil de la forma $5x$. Así mismo, podemos escribir el producto repetido $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ de manera más eficiente con exponentes.

Definición 1.1 *Sea x un número real y n un número natural, el símbolo x^n se llama la* ***potencia*** *$n-$**ésima de** x, y representa el producto n veces de x. Así*

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ veces } x}$$

donde x es la base y n es el exponente. Se lee usualmente como «x elevado a la n»

Algunos casos particulares son: cuando $n = 2$, se lee elevado al cuadrado y cuando $n = 3$ se dice que está elevado al cubo.

Ejemplo 1.2

1. $7^5 = 7 * 7 * 7 * 7 * 7 = 16807$
2. $(-6)^4 = (-6) * (-6) * (-6) * (-6) = 1296$
3. $-6^4 = -6 * 6 * 6 * 6 = -1296$
4. $(5x)^3 = (5x) * (5x) * (5x)$
5. $(x - y)^2 = (x - y) * (x - y)$

Observación: CUIDADO De los ejemplos 2. y 3. se nota que $(-x)^n \neq -x^n$ en algunos casos
En general que $(ax)^n \neq ax^n$

A continuación damos la definición de potencia $n-$ésima de x para n en los enteros

Definición 1.3 *Para un número real x que no sea cero y un entero positivo n, el símbolo x^{-n} representa el recíproco de x^n, es decir,*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \textit{para } x \neq 0$$

Para $n = 0$, se define $x^n = x^0 = 1$

Ejemplo 1.4

1. $3^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$

2. $(-2)^{-5} = \dfrac{1}{(-2)^5} = \dfrac{1}{-32} = \dfrac{-1}{32}$

3. $(\pi + 5)^0 = 1$

4. $(7y)^{-3} = \dfrac{1}{(7y)^3}$

5. $(3z - w)^{-2} = \dfrac{1}{(3z - w)^2}$

Leyes de los exponentes. Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas leyes de los exponentes

Sean x y y números reales, m y n enteros, se tienen las siguientes leyes para los exponentes

1. $x^m x^n = x^{m+n}$
2. $(x^m)^n = x^{mn}$
3. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
4. $(xy)^n = x^n y^n$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

Otras leyes que se concluyen de las anteriores son:

1. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$
2. $\dfrac{x^{-n}}{y^{-m}} = \dfrac{y^m}{x^n}$
3. $\dfrac{x^n}{y^{-m}} = x^n y^m$
4. $\dfrac{x^{-n}}{y^m} = \dfrac{1}{x^n y^m}$

Observación: CUIDADO $(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n$, por ejemplo para $x = 3, y = 4, n = 2$, se tiene $(3+4)^2 = 49 \neq 25 = 3^2 + 4^2$

Ejemplo 1.5 *Simplificar y expresar con exponentes positivos:*

1. $3^{-7}3^2 = 3^{-7+2} = 3^{-5} = \dfrac{1}{3^5}$

2. $\dfrac{(-2)^3}{(-2)^5} = (-2)^{3-5} = (-2)^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$

3. $\left((6x)^{-3}\right)^4 = (6x)^{-12} = \dfrac{1}{(6x)^{12}}$

4. $\dfrac{-xy^2z^3}{(x^3y^5z^2)^{-2}} = (-xy^2z^3)(x^3y^5z^2)^2 = -xy^2z^3x^6y^{10}z^4 = -x^7y^{12}z^7$

5. $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x+y}} = \dfrac{\dfrac{y+x}{xy}}{\dfrac{1}{x+y}} = \dfrac{(x+y)(x+y)}{xy} = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$

2. Radicación

Sabemos lo que 3^n significa siempre que n sea un entero. Para dar significado a una potencia cuyo exponente es un número racional, por ejemplo $3^{2/7}$, necesitamos estudiar radicales

Definición 2.1 *Sean x un número real y n entero positivo mayor o igual que 2, entonces la **raíz $n-$ésima principal** de x se define como el número r que cumple:*

$$\sqrt[n]{x} = r \textit{significa que } r^n = x$$

donde x se llama el radicando o subradical y n el índice.

Observaciones:

1. Cuando n es par, x tiene que ser positivo, ya que no hay (en los reales) un número r elevado a una potencia par, que de por resultado un número negativo.

2. Cuando n es par y x es positivo, existen dos valores para la raíz $n-$ésima $(\pm r)$, sin embargo el símbolo $\sqrt[n]{x}$ se reserva para la raíz $n-$ésima positiva (principal); denotamos la raíz $n-$ésima negativa mediante $-\sqrt[n]{x}$.

3. Si el índice $n = 2$, normalmente se omite del radical; es decir, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ y decimos que $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada de x; Cuando $n = 3$, decimos que $\sqrt[3]{x}$ es la raíz cúbica de x.

Ejemplo 2.2

1. $\sqrt[4]{81} = 3 \textit{ya que } 3^4 = 81$

2. $\sqrt[5]{-32} = -2 \textit{ya que } (-2)^5 = 32$

3. $\sqrt[3]{x^{21}} = x^7 \textit{ya que } (x^7)^3 = x^{21}$

4. $\sqrt[6]{-64} =$ *no está definida, ya que NO existe un número real r tal que* $r^6 = -64$

Propiedades de los radicales.

Sean x y y números reales, m y n naturales mayores que 1, se tienen las siguientes propiedades:

1. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
2. $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$
4. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
5. $\sqrt[n]{x^n} = x$ si n es impar
6. $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ si n es par

Ejemplo 2.3 *Simplificar y expresar con exponentes positivos:*

1. $\sqrt[3]{25x}\,\sqrt[3]{5x^2y^3} = \sqrt[3]{5^3x^3y^3} = \sqrt[3]{(5xy)^3} = 5xy$

2. $\dfrac{\sqrt[4]{48x^6}}{\sqrt[4]{3x^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{48x^6}{3x^2}} = \sqrt[4]{16x^4} = \sqrt[4]{2^4x^4} = \sqrt[4]{(2x)^4} = |2x|$

3. $\sqrt[5]{\sqrt[7]{x^{35}}} = \sqrt[35]{x^{35}} = x$

Observación: CUIDADO

1) $\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

2) $\sqrt{x^2+y^2} \neq x+y$

con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales, por ello, definimos los exponentes racionales como sigue:

Definición 2.4 *Para cualquier exponente racional m/n, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos:*

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Si n es par, entonces es necesario que $x > 0$.

Observación: Con la definición anterior, las leyes de los exponentes para exponentes enteros, se cumplen para exponentes racionales.

Ejemplo 2.5 *Simplificar y expresar con exponentes positivos:*

1. $3x^{7/3}5(xy)^{8/3}y^{2/3} = 15x^{7/3+8/3}y^{8/3+2/3} = 15x^{15/3}y^{10/3} = 15x^5y^{10/3}$
2. $\dfrac{8^2x^{9/5}y^{-7/2}}{4^3x^{-4/3}y^{-5/2}} = \dfrac{64x^{9/5+4/3}y^{-7/2+5/2}}{64} = x^{47/15}y^{-1} = \dfrac{x^{47/15}}{y}$
3. $\left(\dfrac{(xy)^{7/8}}{x^2y^{-9/8}}\right)^4 = \dfrac{((xy)^{7/8})^4}{(x^2y^{-9/8})^4} = \dfrac{(xy)^{28/8}}{x^8y^{-36/8}} = \dfrac{(xy)^{7/2}}{x^8y^{-9/2}} = \dfrac{x^{7/2}y^{7/2}}{x^8y^{-9/2}}$
   $= x^{7/2-8}y^{7/2+9/2} = x^{-9/2}y^8 = \dfrac{y^8}{x^{9/2}}$