INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

MATEMÁTICAS BÁSICAS

FACTORIZACIÓN

GRUPO DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

1. Factorización

Introducción Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, ya se tiene como calcular el producto $p(x)q(x)$. El objetivo en esta parte es hacer el procedimiento en sentido contrario, es decir, dado un polinomio, como escribirlo como producto de otros polinomios

Definición 1.1 .

1. *La **factorización** es el proceso de expresar sumas (restas) de términos (polinomios) en forma de productos.*
2. *A los términos que forman los productos se les llama **factores** del polinomio original.*
3. *Se dice que un factor es irreducible, si no se puede descomponer como producto de otros factores de grado mayor o igual a* 1.
4. *Se dice que un polinomio está completamente factorizado, cuando se expresa como un producto de factores irreducibles.*

Ejemplo 1.2 .

1. *Como* $3x^2(2x-3) = 6x^3 - 9x^2$*, así* $3x^2$ *y* $2x-3$ *son factores del polinomio* $6x^3 - 9x^2$.
2. *Ya que* $(x+3)(x-4) = x^2-x-12$*, podemos decir que la factorización de* x^2-x-12 *es* $(x+3)(x-4)$.
3. *Para el polinomio* x^4-1 *se tiene que* x^2+1 *y* x^2-1 *son factores, ya que* $(x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$*; sin embargo uno de estos factores no es irreducibles, ya que* (x^2-1) *a su vez puede ser factorizado como* $(x+1)(x-1)$*, así* $x^4-1 = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ *queda completamente factorizado.*

Observación: Se debe tener en cuenta respecto a que conjunto se está factorizando, por ejemplo el polinomio x^2-2 no factoriza en el conjunto de los números enteros, sin embargo en el conjunto de los números reales x^2-2 se puede factorizar como $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. En estas notas vamos a considerar factorización sobre los reales.

Observación: Existen diversos métodos para factorizar polinomios, a continuación listamos algunos de ellos, que son los mas utilizados en este curso.

1.1. Factor Común

Este caso de factorización se basa en la propiedad distributiva ($a(x \pm y) = ax \pm ay$); a no es mas que el máximo común divisor de los términos, es decir, los factores comunes con su menor exponente, así al factorizar se tiene $ax \pm ay = a(x \pm y)$

Ejemplo 1.3 *Factorizar las siguientes expresiones:*

1. $18x^3y^6 - 12x^5y^4$, *el mcd entre los monomios es* $6x^3y^4$, *así que este es el factor común luego se buscan los monomios por los que hay que multiplicar para obtener el polinomio original, de donde,* $18x^3y^6 - 12x^5y^4 = 6x^3y^4(3y^2 - 2x^2)$

2. $15x^3y + 5x^2 = 5x^2(3xy + 1)$

3. $50a^3bc^4 + 30a^2b^3c^3 - 15a^4c^2 - 25a^7c^3 = 5a^2c^2(10abc^2 + 6b^3c - 3a^2 - 5a^5c)$

4. $3xy(a - 2b) + 6x^2(a - 2b) = 3x(a - 2b)(y + 2x)$

1.2. Factor Común por Agrupación

En ocasiones no es posible obtener un factor común de una expresión dada, sin embargo se pueden agrupar algunos términos y después de algunas operaciones lograr factorizar.

Observación: Este caso se aplica si hay por lo menos 4 términos.

Ejemplo 1.4 1. *Factorizar* $2y^2 - yz + 6y - 3z$

Solución:

$$\begin{aligned} 2y^2 - yz + 6y - 3z &= (2y^2 + 6y) + (-yz - 3z) && \textit{agrupación de términos} \\ &= 2y(y + 3) - z(y + 3) && \textit{factor común en cada grupo} \\ &= (y + 3)(2y - z) && \textit{factor común} \end{aligned}$$

2. *Factorizar* $6ax - 4bx - 9ay + 6by$

Solución:

$$\begin{aligned} 6ax - 4bx - 9ay + 6by &= (6ax - 4bx) + (-9ay + 6by) && \textit{agrupación de términos} \\ &= 2x(3a - 2b) - 3y(3a - 2b) && \textit{factor común en cada grupo} \\ &= (3a - 2b)(2x - 3y) && \textit{factor común} \end{aligned}$$

3. *Factorizar* $ax^3 + ax - bx^2 - b + x^2 + 1$

Solución:

$$\begin{aligned} ax^3 + ax - bx^2 - b + x^2 + 1 &= (ax^3 + ax) + (-bx^2 - b) + (x^2 + 1) && \textit{agrupación de términos} \\ &= ax(x^2 + 1) - b(x^2 + 1) + 1(x^2 + 1) && \textit{factor común en cada grupo} \\ &= (x^2 + 1)(ax - b + 1) && \textit{factor común} \end{aligned}$$

Observación: La factorización es independiente de cuales términos se agrupen, así en el ejemplo (2), se podrían agrupar el primer con el tercer término, y el segundo con el cuarto para obtener el mismo resultado, como sigue:
Factorizar $6ax - 4bx - 9ay + 6by$
Solución:

$$\begin{aligned} 6ax - 4bx - 9ay + 6by &= (6ax - 9ay) + (-4bx + 6by) && \text{agrupación de términos} \\ &= 3a(2x - 3y) - 2b(2x - 3y) && \text{factor común en cada grupo} \\ &= (2x - 3y)(3a - 2b) && \text{factor común} \end{aligned}$$

Se puede notar que es el mismo producto pero en orden contrario

1.3. Trinomio Cuadrado Perfecto

Este caso de factorización proviene del producto notable del cuadrado de una suma ó de una resta $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
Así podemos decir que la factorización de $a^2 \pm 2ab + b^2$ es $(a \pm b)^2$.
Para factorizar en este caso es necesario que el primer y el tercer término sean cuadrados perfectos y que el término del medio sea el doble del producto de las raíces de los términos de los extremos.

Ejemplo 1.5 *1. Factorizar* $x^2 - 18x + 81$

solución:

$$\begin{array}{cccl} x^2 & -18x & +81 & = \quad (x-9)^2 \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow & \\ x \rightarrow & 2(x)(9) & \leftarrow 9 & \end{array}$$

2. Factorizar $9x^2 + 24xy + 16y^2$

solución:

$$\begin{array}{cccl} 9x^2 & +24xy & 16y^2 & = \quad (3x+4y)^2 \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow & \\ 3x \rightarrow & 2(3x)(4y) & \leftarrow 4y & \end{array}$$

El próximo ejemplo mezcla los casos de factorización vistos hasta ahora

3. Factorizar completamente $x^4 - 2x^2y + y^2 + 5x^2 - 5y$

solución:

$$\begin{array}{ccccccl} & x^4 & -2x^2y & +y^2 & +5x^2 & -5y & \\ = & (x^4 & -2x^2y & +y^2) & +(5x^2 & -5y) & \textit{Factor común por agrupación} \\ & \downarrow & \uparrow & \downarrow & & & \\ & x^2 \rightarrow & 2(x^2)(y) & \leftarrow y & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - y)^2 + 5(x^2 - y) && \textit{Trinomio Cuadrado perfecto} \\ &= (x^2 - y)(x^2 - y + 5) && \textit{Factor común} \end{aligned}$$

1.4. Diferencia de Cuadrados

La Diferencia de cuadrados se viene del producto notable de suma por diferencia $((x+y)(x-y) = x^2 - y^2)$. Por lo tanto, para factorizar se tiene que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

Ejemplo 1.6 1. *Factorizar completamente* $x^2 - 9y^6$

solución:

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & -9y^6 & = & (x+3y^3)(x-3y^3) \\ \downarrow & \downarrow & & \\ x & 3y^3 & & \end{array}$$

2. *Factorizar completamente* $81x^8 - 1$

solución:

$$\begin{array}{cc} 81x^8 & -1 \\ \downarrow & \downarrow \\ 9x^4 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} = (9x^4+1)(9x^4-1) & \textit{Diferencia Cuadrados} \\ = (9x^4+1)(3x^2+1)(3x^2-1) & \textit{Diferencia Cuadrados} \\ = (9x^4+1)(3x^2+1)(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1) & \textit{Diferencia Cuadrados} \end{array}$$

El próximo ejemplo mezcla los casos de factorización vistos hasta ahora

3. *Factorizar completamente* $x^2 - 6x + 9 - z^4$

solución:

$$\begin{array}{cccccc} & x^2 & -6x & 9 & -z^4 & \\ = & (x^2 & -6x & +9) & -z^4 & \textit{Factor común por agrupación} \\ & \downarrow & \uparrow & \downarrow & & \\ & x \rightarrow & 2(x)(3) & \leftarrow 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} = (x-3)^2 - z^4 & \textit{Trinomio Cuadrado perfecto} \\ = (x-3+z^2)(x-3-z^2) & \textit{Diferencia de Cuadrados} \end{array}$$

1.5. Trinomio de la forma $x^2 \pm bx \pm c$

Al realizar el producto $(x \pm m)(x \pm n) = x^2 + (m \pm n)x \pm mn$, así para factorizar $x^2 \pm bx \pm c$ se deben buscar 2 números m, n tales que $mn = c$ y $m \pm n = b$, y por tanto se tendrá que $x^2 \pm bx \pm c = (x \pm m)(x \pm n)$

Observación: Para la selección de los signos, en el primer paréntesis se coloca el signo de b y en el segundo el producto de los signos de b y c, si en los paréntesis dan los mismos signos se buscan dos número que sumados den b, si dan signos contrarios se busca que la resta de b. En el primer paréntesis va el número mayor en valor absoluto y en segundo el otro número.

Ejemplo 1.7 *1. Factorizar completamente* $x^2 - 10x + 24$

solución:

$x^2 - 10x + 24 = (x- \quad)(x- \quad)$, *el signo* $-$ *del primer paréntesis es por el término* $-10x$ *y el* $-$ *del segundo por el producto de los signos de* $-10x$ *y* $+24$. *Ahora como ambos paréntesis tienen el mismo signo, se buscan dos números que multiplicados de* 24 *y sumados de* 10*; en este caso son* 6 *y* 4*, así*

$x^2 - 10x + 24 = (x - 6)(x - 4)$

2. *Factorizar completamente* $x^2 + 17xy - 60y^2$

solución:

$x^2 + 7xy - 60y^2 = (x+ \quad)(x- \quad)$, *el signo* $+$ *del primer paréntesis es por el término* $+7xy$ *y el* $-$ *del segundo por el producto de los signos de* $7xy$ *y* $-60y^2$. *Ahora como ambos paréntesis tienen signos contrarios, se buscan dos números que multiplicados de* $60y^2$ *y restarlos de* $7y$*; en este caso son* $20y$ *y* $3y$*, así*

$x^2 + 17xy - 60y^2 = (x + 20y)(x - 3y)$

3. *Factorizar completamente* $x^2 - 10x - 75$

solución:

$x^2 - 10x - 75 = (x- \quad)(x+ \quad)$, *el signo* $-$ *del primer paréntesis es por el término* $-15x$ *y el* $+$ *del segundo por el producto de los signos de* $-15x$ *y* -75. *Ahora como ambos paréntesis tienen signos contrarios, se buscan dos números que multiplicados de* 75 *y restarlos de* 10*; en este caso son* 15 *y* 5*, así*

$x^2 - 10x - 75 = (x - 15)(x + 5)$

Los próximos ejemplos mezclan casos de factorización vistos hasta ahora

4. *Factorizar completamente* $x^4 - 13x^2 + 36$

solución:

$$\begin{aligned} & x^4 - 13x^2 + 36 & \\ = \; & (x^2 - 9)(x^2 - 4) & \textit{Trinomio de la forma} \\ = \; & (x+3)(x-3)(x+2)(x-2) & \textit{Diferencia de Cuadrados} \end{aligned}$$

5. *Factorizar completamente* $x^2 - 9x + 18 + xy - 6y$

solución:

Se puede agrupar de la siguiente forma $x^2 - 9x + 18 + xy - 6y = (x^2 - 9x + 18) + (xy - 6y)$ *el el* *primer paréntesis tenemos un trinomio de la forma x^2+bx+c y en el segundo un factor común*

$$\begin{aligned}
& x^2-9x+18+xy-6y \\
= \;& (x^2-9x+18)+(xy-6y) && \textit{Factor común por agrupación} \\
= \;& (x-6)(x-3)+y(x-6) && \textit{Trinomio de la forma y factor común} \\
= \;& (x-6)(x-3+y) && \textit{Factor común}
\end{aligned}$$

1.6. Trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$ con $a \neq 0$

Se multiplica y divide por a toda la expresión para llevarla a la forma

$$\frac{(ax)^2 \pm b(ax) \pm ac}{a}$$

y haciendo el cambio de variable $y = ax$ se tiene el caso anterior.

Observación: Al factorizar y simplificar siempre se cancela la a del denominador.

Ejemplo 1.8 1. *Factorizar completamente* $6x^2-7x+1$

solución:

$$\begin{aligned}
& 6x^2-7x+1 \\
= \;& \frac{6(6x^2-7x+1)}{6} = \frac{(6x)^2-7(6x)+6}{6} && \textit{multiplicar y dividir por } 6 \\
= \;& \frac{(6x-6)(6x-1)}{6} = \frac{6(x-1)(6x-1)}{6} && \textit{Trinomio de la forma} \\
= \;& (x-1)(6x-1) && \textit{Factor común y simplificación}
\end{aligned}$$

2. *Factorizar completamente* $15x^2-4x-3$

solución:

$$\begin{aligned}
& 15x^2-4x-3 \\
= \;& \frac{15(15x^2-4x-3)}{15} = \frac{(15x)^2-4(15x)-45}{15} && \textit{multiplicar y dividir por } 15 \\
= \;& \frac{(15x-9)(15x+5)}{15} = \frac{3(5x-3)5(3x+1)}{15} && \textit{Trinomio de la forma} \\
= \;& (5x-3)(3x+1) && \textit{Factor común y simplificación}
\end{aligned}$$

3. *Factorizar completamente* $7x^2+19x-6$

solución:

$$\begin{aligned}
& 7x^2+19x-6 \\
= \;& \frac{7(7x^2+19x-6)}{7} = \frac{(7x)^2+19(7x)-42}{7} && \textit{multiplicar y dividir por } 7 \\
= \;& \frac{(7x+21)(7x-2)}{7} = \frac{7(x+3)(7x-2)}{7} && \textit{Trinomio de la forma} \\
= \;& (x+3)(7x-2) && \textit{Factor común y simplificación}
\end{aligned}$$

1.7. Completación de cuadrados

Algunos trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ no son fáciles de factorizar con los métodos anteriores, completar cuadrados, es un método que se usa para convertir estos trinomios a otra equivalente de la forma:$a(x+h)^2 - k^2$, para después factorizar usando diferencia de cuadrados, como sigue:

- Se saca factor común a, se obtiene $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.
- Dentro del paréntesis se suma y resta $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, se tiene $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$
- Los 3 primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto y los otros 2 se suman, para obtener $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$
- Si $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ es positivo, se aplica diferencia de cuadrados
- Si $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ es negativo, el trinomio no se puede factorizar en los reales.

Ejemplo 1.9 *1. Factorizar completamente* $x^2 - 2x - 1$

solución:

No es posible factorizar por trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ *ya que no se pueden encontrar fácil 2 números que multiplicados de* -1 *y sumados* -2*. Vamos a completar cuadrados*

$$\begin{aligned}
& x^2 - 2x - 1 & \\
= \;& x^2 - 2x + 1 - 1 - 1 & \textit{sumar y restar } \frac{b}{2a} = \pm 1 \\
= \;& (x-1)^2 - 2 & \textit{Trinomio cuadrado perfecto y suma} \\
= \;& (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) & \textit{Diferencia de cuadrados}
\end{aligned}$$

2. Factorizar completamente $3x^2 + 7x + 3$

solución:

$$\begin{aligned}
& 3x^2 + 7x - 5 & \\
= \;& 3\left(x^2 + \frac{7}{3}x + 1\right) & \textit{Factor cumún } 3 \\
= \;& 3\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 + 1\right) & \textit{sumar y restar } \frac{b}{2a} \\
= \;& \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{13}{36} & \textit{Trinomio cuadrado perfecto y suma} \\
= \;& \left(x + \frac{7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right) & \textit{Diferencia de cuadrados}
\end{aligned}$$

1.8. Suma de Cubos

Se obtiene del producto notable $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$, así para factorizar se realiza la operación contraria, es decir, $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Ejemplo 1.10 *1. Factorizar completamente* $x^6 + 8y^3$

solución:

$$\begin{array}{lll} x^6 & +8y^3 & = (x^2+2y)(x^4-2x^2y+4y^2) \\ \downarrow & \downarrow & \\ x^2 & 2y & \end{array}$$

2. Factorizar completamente $x^9 + 1$

solución:

$$\begin{array}{ll} x^9 & +1 \\ \downarrow & \downarrow \\ x^3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (x^3+1)(x^6-x^3+1) && \textit{suma de cubos} \\ &= (x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1) && \textit{suma de cubos} \end{aligned}$$

1.9. Resta de Cubos

Similar a la suma de cubos, osea, se obtiene del producto notable $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$, así para factorizar se realiza la operación contraria, es decir, $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

Observación: Por lo general los trinomios $x^2 \pm xy + y^2$ no factorizan en $\mathbb{R}$, en nuestro caso, los supondremos irreducible aunque en algunos casos no lo sean.

Ejemplo 1.11 *1. Factorizar completamente* $27x^3 - y^9$

solución:

$$\begin{array}{lll} 27x^3 & -y^9 & = (3x-y^3)(9x^2+3xy^3+y^6) \\ \downarrow & \downarrow & \\ 3x & y^3 & \end{array}$$

2. Factorizar completamente $x^6 - y^6$

solución: Forma 1

$$\begin{array}{lll} x^6 & -y^6 & \\ \downarrow & \downarrow & \textit{Resta de cubos} \\ x^2 & y^2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4) && \textit{resta de cubos} \\ &= (x+y)(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4) && \textit{Diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

solución: Forma 2

$$\begin{array}{lll} x^6 & -y^6 & \\ \downarrow & \downarrow & \textit{Diferencia de cuadrados} \\ x^3 & y^3 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (x^3+y^3)(x^3-y^3) && \textit{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2) && \textit{Suma y Resta de cubos} \end{aligned}$$

Observación: *Si se nota en las dos formas de factorizar el ejercicio anterior dan resultados "diferentes", esto se debe a que el término* $x^4+x^2y^2+y^4$ *se puede factorizar como* $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ *solo que esta factorización está fuera de nuestro alcance y por eso en la observación anterior se decía que este término se consideraba irreducible.*

3. *Factorizar completamente* $x^6 + 19x^3 - 216$

   solución:

$$
\begin{array}{rll}
 & x^6 + 19x^3 - 216 & \\
= & (x^3 + 27)(x^3 - 8) & \textit{Trinomio de la forma} \\
= & (x+3)(x^2 - 3x + 9)(x-2)(x^2 + 2x + 4) & \textit{Suma y resta de cubos}
\end{array}
$$