1. Introducción

La división de polinomios es análoga a la división de números y funciona de forma similar.
Por ejemplo: $\frac{74237}{6} = 12372 + \frac{5}{6}$ ó de otra forma $74237 = 6(12372) + 5$

Definición 1.1 *Si $N(x)$, $D(x)$ son polinomios de grado m y n respectivamente. consideremos la fracción* $\dfrac{N(x)}{D(x)}$

1. *Se dirá que la* ***fracción es propia*** *si el grado de $D(x)$ es mayor que el grado de $N(x)$, esto es $n > m$*

   Ejemplo 1.2 *La fracción*
$$\frac{x^2+3x-1}{2x^3+1}$$
   es una fracción propia porque el grado del numerador es 2, mientras el grado del denominador es 3.

2. *Si una fracción no es propia se dirá que es una* ***fracción impropia***.

   Ejemplo 1.3 *La fracción*
$$\frac{x^4+3}{x^2+3x+1}$$
   es una fracción impropia porque el grado del numerador es 4 y el el grado del denominador es 2.

El siguiente resultado, el cual se dá sin demostración garantiza que siempre se pueda realizar la división de polinomios

Teorema 1.4 ***Algoritmo de la división:***
Sean $N(x)$, $D(x)$ polinomios con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ con $r(x) = 0$ o de grado menor que el grado de $D(x)$ tal que
$$N(x) = D(x) \times q(x) + r(x)$$
o de otra manera.
$$\frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$$

Donde $N(x)$ recibe el nombre de numerador o dividendo, $D(x)$ será el denominador o divisor, $q(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el residuo.

Observación:

1. Cuando $r(x) = 0$ se tiene que $N(x) = D(x) \times q(x)$ y se tendría factorizado a $N(x)$

2. La división de polinomios la vamos a considerar si la fracción a dividir es una fracción impropia.

La forma habitual de representar la división de polinomios de manera larga se muestra a continuación.

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ x^2+3x+6 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^2-3x & x \\ \cline{1-1} 6 & \text{Cociente} \\ \text{Residuo} & \end{array}$$

Donde $x^2 + 3x + 6$ es el numerador o dividendo, se puede observar que es de grado 2, $x + 3$ es el denominador o divisor y es de grado 1, por lo anterior se puede afirmar que la fracción es impropia, x es el cociente, y 6 es el residuo. La fracción se puede escribir de la forma

$$\frac{x^2+3x+6}{x+3} = x + \frac{6}{x+3}$$

o de otra manera.

$$x^2 + 3x + 6 = (x + 3)x + 6$$

Ejercicios Para las siguientes expresiones algebraicas indicar si la fracción es propia o impropia.

1. $\frac{x^2+3x}{x+1}$
2. $\frac{x^2+3x+2}{x^4+1}$
3. $\frac{x^2-x+3}{x^3-3x+1}$
4. $\frac{x^2+3x}{x^2+1}$
5. $\frac{x^2+3x}{-x^5+x+2}$
6. $\frac{x^4+3x}{-x^2+3x+2}$

Solución:**1.** Impropia, **2.** Propia, **3.** Propia, **4.** Impropia, **5.** Propia, **6.** Impropia.

2. División larga de polinomios

La división larga se usa habitualmente para fracciones cuyo denominador es de grado mayor o igual a 2. Antes de mostrar la forma de realizar la división de polinomios, se realizará la división de dos números naturales.

Calcular el resultado de dividir.

$$\frac{234}{25}$$

Para ejecutar la división se procede ubicando el numerador y el denominador según lo planteado anteriormente esto es

$$\begin{array}{r|l} 234 & \underline{\;25\;} \\ -225 & \;9 \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

De manera análoga se puede proceder para dividir dos polinomios.

Ejemplo 2.1 ***Explicación:***

Dividir la fracción dada.

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + x - 4}{x^2 + 3}$$

1. *Buscar un término que multiplicado por* x^2 *de* $3x^3$*, ese término es* $3x$ *porque* $3x \times x^2 = 3x^3$ *ahora se escribe debajo de* $3x^3$ *del dividendo pero con el signo contrario esto es* $-3x^3$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & -2x^2 & +x & -4 & x^2+3 \\ \cline{5-5} -3x^3 & & & & 3x \end{array}$$

2. *Ejecutar la multiplicación de* $3x$ *por el término restante del divisor* 3 *esto es :* $3x \times 3 = 9x$ *pasa con signo contrario* $-9x$ *y se ubica debajo del correspondiente término* $+x$ *del dividendo.*

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x & -2x^2 & +x & -4 & x+3 \\ \cline{5-5} -3x^3 & & -9x & & 3x \end{array}$$

3. *Realizar la suma de los términos del lado izquierdo con sus respectivos signos algebraicos.*

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{3x^3} & -2x^2 & +x & -4 & x+3 \\ \cline{5-5} \cancel{-3x^3} & & -9x & & 3x^2 \\ \cline{1-3} & & -8x & & \end{array}$$

4. *Ahora se desplaza el término* $-2x^2$ *hacia abajo para formar la expresión* $-2x^2 - 8x$ *y reiniciar el procedimiento. El desarrollo completo se puede apreciar a continuación.*

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{3x^3} & -2x^2 & +x & -4 & x^2+3 \\ \cline{5-5} \cancel{-3x^3} & & -9x & & 3x-2 \\ \cline{1-3} & \cancel{-2x^2} & -8x & & \\ & \cancel{2x^2} & & +6 & \\ \cline{2-4} & & -8x & +2 & \end{array}$$

Así se obtiene que

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + x - 4}{x^2 + 3} = 3x - 2 + \frac{-8x + 2}{x^2 + 3}$$

o de forma similar

$$3x^3 - 2x^2 + x - 4 = (x^2 + 3)(3x - 2) + (-8x + 2)$$

Ejercicios Realizar las divisiones indicadas y expresarlo en la forma $q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$

1. $\frac{x^2+3x-1}{x^2+1}$
2. $\frac{4x^4-x^3+4}{x^2+2x}$
3. $\frac{-5x^5-x^2+2}{x^2+3x+1}$
4. $\frac{6x^5-4x+2}{3x^3+4x-1}$
5. $\frac{4x^3+x^2-x+1}{8x^2+x-2}$

Solución: 1. $1 + \frac{3x}{x^2+1}$ **2.** $4x^2 - 9x + 16 + \frac{32x+4}{x^2+2x}$ **3.** $-5x^3 + 15x^2 - 40x + 104 - \frac{272x+102}{x^2+3x+1}$

3. División sintética

La división sintética es una forma de dividir que resume la división larga en aquellos casos en los cuales el divisor es un polinomio de grado uno. Sólo se opera con los coeficientes del polinomio que hace las veces de dividendo, y con el inverso aditivo del término independiente del polinomio que hace las veces de divisor.

Ejemplo 3.1 *Dividir por división sintética.*

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}$$

En este caso el dividendo es el polinomio $2x^2 - 3x + 1$ *notar que el polinomio esta ordenado y el divisor es* $x + 2$*, los coeficientes del dividendo son* $\{2, -3, 1\}$ *el número que haría las veces de divisor se puede obtener al despejar* x *de la siguiente manera* $x + 2 = 0$ *entonces* $x = -2$*, Una vez están identificados los coeficientes y el número que haría las veces de divisor se pueden ubicar en una estructura como la que se indica a continuación.*

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ & & & \\ \hline \end{array}$$

Ahora para realizar la división sintética basta con reescribir el primer coeficiente (para el ejemplo 2) debajo de la línea

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ & & & \\ \hline 2 & & & \end{array}$$

Seguidamente se multiplica el coeficiente del divisor (-2) *por el primer coeficiente del dividendo* (2) *y el resultado se ubica debajo del segundo coeficiente del divisor* (-3) *como se indica en la figura a continuación.*

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ & -4 & & \\ \hline 2 & & & \end{array}$$

Ahora se suma el segundo coeficiente (-3) *con el resultado que se obtuvo en el paso anterior* (-4) *y resultado se ubica debajo de la línea como se indica en la siguiente imagen.*

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ & -4 & & \\ \hline 2 & -7 & & \end{array}$$

Ahora se repite el procedimiento para el nuevo número (-7)

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ & -4 & 14 & \\ \hline 2 & -7 & & \end{array}$$

El procedimiento se repite de igual manera hasta agotar los coeficientes del dividendo.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ & -4 & 14 & \\ \hline 2 & -7 & 15 & \end{array}$$

El último término (15) *es el residuo de la división, los valores* $\{2, -7\}$ *son los coeficientes de un polinomio (el cociente) con grado menor en 1 que el dividendo. Para finalizar la división se expresará de la forma*

$$\frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$$

Donde $q(x) = 2x - 7$ *y* $r(x) = 15$ *y* $D(x) = x + 2$*, La solución será.*

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2} = 2x - 7 + \frac{15}{x + 2}$$

o de la forma

$$N(x) = D(x) \times q(x) + r(x)$$

Será

$$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 7)(x + 2) + 15$$

Se puede usar otro esquema de la división como se indica a continuación.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ \cline{4-4} & -4 & 14 & \\ \hline 2 & -7 & 15 & \end{array}$$

Observación: En caso de que alguno de los términos del polinomio dividendo haga falta, se tiene que conservar su espacio sumando $0x^k$ donde k es el grado de x que falta en el polinomio.

Ejemplo 3.2 *Dividir*

$$\frac{3x^3 + 5}{x - 1}$$

Como se observa la división se puede realizar usando el procedimiento de división sintética debido a que el divisor es un polinomio de grado 1*, el polinomio dividendo* $(3x^3 + 5)$ *es de grado* 3*, esta ordenado, pero no contiene los términos correspondientes a* x^2 *y* x^1*, por esto se debe completar el dividendo como se ilustra a continuación.*

$$3x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 5$$

Los coeficientes $\{3, 0, 0, 5\}$ *se usarán en la división sintética.*

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ & 3 & 3 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & 8 & \end{array}$$

El resultado de la división es:

$$\frac{3x^3 + 5}{x - 1} = 3x^2 + 3x + 3 + \frac{8}{x - 1}$$

o también

$$3x^3 + 5 = (3x^2 + 3x + 3)(x - 1) + 8$$

Ejercicios Aplicar el procedimiento de división sintética a las siguientes fracciones.

1. Complete los siguientes esquemas de división sintética.

   a) Sea la fracción $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
   El desarrollo de la división por el método de división sintética es:

$$
\begin{array}{cccc|c}
\boxed{} & \boxed{0} & \boxed{} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\
 & \boxed{} & \boxed{1} & \boxed{} & \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Expresar el resultado de la forma $N(x) = D(x)q(x) + r(x)$

b) Considera la fracción $\dfrac{3x^4 + 4x^2 - x + 1}{x + 2}$
Dividir usando el método de división sintética y completar los espacios.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{} & \boxed{0} & \boxed{} & \boxed{-1} & \boxed{} & \boxed{} \\
 & \boxed{} & \boxed{12} & \boxed{} & \boxed{} & \\
\hline
\boxed{3} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{67} &
\end{array}
$$

Expresar el resultado de la forma $N(x) = D(x)q(x) + r(x)$

2. $\dfrac{3x^3 - x + 1}{x + 3}$
3. $\dfrac{x^2 + 4x + 6}{x - 2}$
4. $\dfrac{3x^5 - x + 4}{x - 4}$
5. $\dfrac{6x^4 - x^2 + 3}{x - 7}$
6. $\dfrac{3x^3 + 2x + 5}{2x + 3}$

Solución: **1.** $3x^2 - 9x + 26 - \frac{77}{x+3}$, **2.** $x + 6 + \frac{18}{x-2}$, **3.** $3x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 192x + 767 + \frac{3072}{x-4}$, **4.** $6x^3 + 42x^2 + 293x + 2051 + \frac{100520}{x-7}$ **5.** $3x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{35}{4} - \frac{\frac{25}{16}}{2x+3}$

4. Teoremas del Residuo y del Factor

El siguiente teorema muestra como se puede usar la división sintética para evaluar polinomios fácilmente

Teorema 4.1 ***Teorema del residuo***
Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor de $P(c)$.

Demostración
Por el algoritmo de la división con $x - c$ como divisor se tiene que

$$P(x) = (x - c)q(x) + r$$

donde r es una constante.

Ahora si $x = c$ se tiene $P(c) = (c - c)q(c) + r = r$, es decir el residuo es $P(c)$.

Ejemplo 4.2 *1. Determine el residuo de dividir $P(x) = 3x^5 - 4x^4 - 7x^2 + 5x - 6$ entre $x - 2$*

Solución: *Por el teorema del residuo, el residuo de la división es $P(2) = 3 * 2^5 - 4 * 2^4 - 7 * 2^2 +$*

$5 * 2 - 6 = 8$

Se puede hacer división sintética y verificar este resultado (Ejercicio).

2. *Determine el residuo de dividir* $P(x) = 7x^{100} - 4x^{35} - 9x^{20} + 5x + 3$ *entre* $x + 1$

   Solución: *Por el teorema del residuo, el residuo de la división es* $P(-1) = 7(-1)^{100} - 4(-1)^{35} - 9(-1)^{20} + 5(-1) + 3 = 7 + 4 - 9 - 5 + 3 = 0$

Definición 4.3 *Dado un polinomio* $P(x)$*, un número* c *que cumple* $P(c) = 0$ *se llama un cero o una raíz de* $P(x)$

Teorema 4.4 ***Teorema del factor***
c es un cero (una raíz) de $P(x)$ si y solo si $x - c$ es un factor de $P(x)$

Demostración
Por el algoritmo de la división se tiene que $P(x) = (x - c)q(x) + r$. Ahora:
a) c es un cero (una raíz) de $P(x)$ entonces $P(c) = 0$, así $P(c) = (c - c)q(c) + r = r = 0$, luego $P(x) = (x - c)q(x)$, es decir, $x - c$ es un factor de $P(x)$.
De otro lado
b) si $x - c$ es un factor de $P(x)$, luego $P(x) = (x - c)q(x)$ de donde $P(c) = (c - c)q(c) = 0$ así c es un cero de $P(x)$.

5. Teorema de los ceros racionales

Teorema 5.1 *Si el polinomio* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de* $P(x)$ *es de la forma* $\frac{p}{q}$ *donde:*
p es un divisor del coeficiente constante a_0 y
q es un divisor del coeficiente principal a_n

Ejemplo 5.2 1. *Encontrar todos los ceros (raíces) racionales de* $p(x) = x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 54x - 45$

Solución: *En este caso* $a_0 = 45$ *sus divisores son:* $p : \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45,$
$a_n = a_4 = 1$ *sus divisores son* $q : \pm 1.$
Así los posibles ceros racionales son $\dfrac{p}{q} : \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45$
$p(1) = 1^4 + 6 * 1^3 - 4 * 1^2 - 54 * 1 - 45 \neq 0$*, luego* 1 *no es cero*
$p(-1) = (-1)^4 + 6 * (-1)^3 - 4 * (-1)^2 - 54 * (-1) - 45 = 0$*, así* -1 *es un cero y se hace división sintética*

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & -4 & -54 & -45 & -1 \\ & -1 & -5 & 9 & 45 & \\ \hline 1 & 5 & -9 & -45 & 0 & \end{array}$$

Así $p(x) = x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 54x - 45 = (x+1)(x^3 + 5x^2 - 9x - 45)$ *y se repite el procedimiento para* $q(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$

$q(-1) = (-1)^3 + 5(-1)^2 - 9(-1) - 45 \neq 0$, *de donde* -1 *no se repite como cero.*

$q(3) = (3)^3 + 5(3)^2 - 9(3) - 45 = 0$, *así* 3 *es un cero de* $q(x)$ *y se hace división sintética*

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -9 & -45 & 3 \\ \hline & 3 & 24 & 45 & \\ \hline 1 & 8 & 15 & 0 & \end{array}$$

De donde $p(x) = (x+1)(x-3)(x^2+8x+15) = (x+1)(x-3)(x+3)(x+5)$ *la última factorización es un trinomio de la forma* $x^2 + bx + c$.

2. *Encontrar todos los ceros (raíces) racionales de* $p(x) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3$

   Solución: *En este caso* $a_0 = 3$ *sus divisores son:* $p : \pm 1, \pm 3,$

   $a_n = a_4 = 4$ *sus divisores son* $q : \pm 1, \pm 2, \pm 4.$

   Así los posibles ceros racionales son $\dfrac{p}{q} : \pm 1, \pm 3, \pm 2, \pm 4, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3/2, , \pm 3/4$

   Se puede verificar que ninguno de los número enteros es un cero, sin embargo

   $p(1/2) = 4(1/2)^4 + 4*(1/2)^3 + (1/2)^2 + 4*(1/2) - 3 = 0$, *así* $1/2$ *es un cero y se hace división sintética*

$$\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & 1 & 4 & -3 & 1/2 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 3 & \\ \hline 4 & 6 & 4 & 6 & 0 & \end{array}$$

   Así $p(x) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3 = (x - 1/2)(4x^3 + 6x^2 + 4x + 6)$ *y se repite el procedimiento para* $q(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 6$

   $q(1/2) = 4(1/2)^3 + 6(1/2)^2 + 4(1/2) + 6 \neq 0$, *luego* $1/2$ *no se repite como cero.*

   $q(-3/2) = 4(-3/2)^3 + 6(-3/2)^2 + 4(-3/2) + 6 = 0$, *así* $-3/2$ *es un cero de* $q(x)$ *y se hace división sintética*

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 4 & 6 & -3/2 \\ \hline & -6 & 0 & -6 & \\ \hline 4 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

   De donde $p(x) = (x - 1/2)(x + 3/2)(4x^2 + 4)$, *como* $4x^2 + 4$ *no se puede factorizar en* $\mathbb{R}$ *se tiene la factorización completa de* $p(x)$.

3. *Verificar que* $p(x) = x^5 + 7x^3 + x^2 + 1$ *no tiene ceros (raíces) racionales.*

   Solución: *En este caso* $a_0 = 1$ *sus divisores son:* $p : \pm 1$

   $a_n = a_5 = 1$ *sus divisores son* $q : \pm 1$.

   Así los posibles ceros racionales son $\frac{p}{q} : \pm 1$

   Pero $p(1) \neq 0$ *y* $p(-1) \neq 0$ *luego* $p(x)$ *no tiene ceros racionales*